ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 JANVIER 1929.

PRÉSIDENCE DE M. LOUIS MANGIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Nörlund**, Correspondant de l'Académie, Président de l'Académie des Sciences de Danemark, et à M. **Koltzoff**, Directeur de l'Institut de biologie expérimentale de Moscou, qui assistent à la séance.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur le cycle de Clapeyron.* Note de M. **L. Lecornu**.

Le cycle de Carnot est figuré, dans le diagramme entropique (s, t), par un rectangle ayant ses côtés parallèles aux axes. C'est le cycle le plus simple qu'on puisse imaginer avec ce mode de représentation; c'est en même temps celui qui, entre deux températures données, procure le meilleur rendement.

Quand on emploie le diagramme de Clapeyron (v, p), le cycle le plus simple est, pareillement, un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Son rendement, en fonction des températures extrêmes, est inférieur à celui du cycle de Carnot; mais, en revanche, il fournit le maximum de travail pour des limites données de variation du volume et de la pression. Il y a donc quelque intérêt à préciser les propriétés thermiques de ce cycle que j'appelle, pour abréger, le cycle de Clapeyron. C'est ce que je vais faire, en me bornant au cas de gaz parfaits ($pv = Rt$).

Affectons des indices 1, 2, 3, 4 les quantités qui se rapportent aux quatre sommets A du rectangle. Les indices 1 et 2 concernent les sommets pour

lesquels sont atteints le maximum t_1 et le minimum t_2 de la température absolue (on se donne t_1 et t_2). Les indices 3 et 4 concernent les deux autres sommets. En A_3, le volume v_3 est égal à v_1 et la pression p_3 est égale à p_2. En A_4, le volume v_4 est égal à v_2 et la pression p_4 est égale à p_1.

On a, dans ces conditions,

$$(1) \qquad \frac{p_1 v_1}{t_1} = \frac{p_2 v_2}{t_2} = \frac{p_2 v_1}{t_3} = \frac{p_1 v_2}{t_4} = R,$$

d'où

$$(2) \qquad t_3 t_4 = t_1 t_2.$$

Soient C, c les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant ($C > c$). Si le cycle est parcouru dans le sens 1 — 3 — 2 — 4, la chaleur absorbée est

$$(3) \qquad q_1 = C(t_1 - t_4) + c(t_4 - t_2),$$

et la chaleur dégagée est

$$(4) \qquad q_2 = C(t_3 - t_2) + c(t_1 - t_3),$$

t_3 et t_4 étant compris entre t_1 et t_2, on voit que q_1 et q_2 sont compris entre $c(t_1 - t_2)$ et $C(t_1 - t_2)$.

La chaleur transformée en travail est

$$(5) \qquad q_1 - q_2 = (C - c)(t_1 + t_2 - t_3 - t_4).$$

Elle ne peut devenir négative; mais elle s'annule pour $t_3 + t_4 = t_1 + t_2$. Comme déjà $t_3 t_4 = t_1 t_2$, cette circonstance se produit si $t_3 = t_1$, $t_4 = t_2$ ou bien $t_3 = t_2$, $t_4 = t_1$. Dans un cas comme dans l'autre, le rectangle a l'une de ses dimensions nulles.

Le rendement est

$$\rho = \frac{q_1 - q_2}{q_1}.$$

En renversant le sens du parcours on aurait un cycle produisant de la chaleur avec absorption de travail. Laissons ce cas de côté.

Toute propriété thermique du cycle de Clapeyron se traduit par une certaine équation $f(q_1, q_2) = 0$ conduisant à une relation entre t_3 et t_4. En y joignant l'équation (2), t_3 et t_4 se trouvent déterminés. On obtient ainsi un ensemble de cycles ayant même rendement et fournissant le même travail. D'après les équations (1), si l'on pose $v_2 = \lambda v_1$, $p_2 = \mu p_1$

$\left(\text{d'où } \lambda\mu = \frac{t_2}{t_1}\right)$, les nombres λ et μ sont les mêmes pour tous les cycles de cet ensemble.

Ceux-ci peuvent être construits de la manière suivante. La diagonale $A_1 A_2$ a pour équation

$$(1-\mu)p_1 x - (1-\lambda)v_1 y = (\lambda - \mu)p_1 v_1.$$

Elle coupe les axes de coordonnées à des distances ξ, η de l'origine ; le produit

$$(6) \qquad \xi\eta = -\frac{(\lambda-\mu)^2}{(1-\lambda)(1-\mu)} R t_1$$

a une valeur constante et négative. D'après cela, les diagonales $A_1 A_2$ enveloppent une hyperbole équilatère, conjuguée de l'isotherme définie par la température $\frac{(\lambda-\mu)^2}{(1-\lambda)(1-\mu)} t_1$. Toute tangente à cette hyperbole rencontre les isothermes t_1, t_2 en des points $A_1 A_2$ répondant à la question. Tout sommet A_1 comporte deux solutions fournies par les tangentes menées de ce point aux deux branches de l'hyperbole.

Il y a deux cas spécialement remarquables.

1° *Cycles de plus grand travail.* — Ces cycles correspondent au maximum de $t_1 + t_2 - t_3 - t_4$. D'après la relation (2), il faut prendre $t_3 = t_4 = \sqrt{t_1 t_2}$. Le travail ainsi obtenu est $(C - c)(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2$. L'égalité de t_3 et t_4 entraîne celle des rapports $\frac{p_2}{p_1}$ et $\frac{v_2}{v_1}$, c'est-à-dire de λ et μ. Les diagonales $A_1 A_2$ passent alors par l'origine. En posant $C = \gamma c$, le rendement a pour expression

$$(7) \qquad \rho = (\gamma - 1)\frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}}{\gamma\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2}}.$$

2° *Cycles de plus grand rendement.* — On les obtient en rendant minimum le rapport

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{t_1 - \gamma t_2 + (\gamma - 1)t_3}{\gamma t_1 - t_2 - (\gamma - 1)t_4},$$

d'où

$$t_3 = \sqrt{t_1 t_2}\,\frac{\sqrt{t_2} + \sqrt{\gamma t_1}}{\sqrt{t_1} + \sqrt{\gamma t_2}}, \qquad t_4 = \sqrt{t_1 t_2}\,\frac{\sqrt{t_1} + \sqrt{\gamma t_2}}{\sqrt{t_2} + \sqrt{\gamma t_1}}.$$

Le rendement atteint alors la valeur

$$\rho = \frac{(\gamma - 1)(t_1 - t_2)}{\gamma t_1 + t_2 + 2\sqrt{\gamma t_1 t_2}}.$$

On vérifie aisément qu'il est supérieur à (7) et inférieur au rendement $\frac{t_1 - t_2}{t_1}$ du cycle de Carnot.

Pour compléter la comparaison des cycles de Carnot et de Clapeyron, il y a lieu d'ajouter la remarque suivante.

Le cycle de Carnot permet, avec deux sources possédant les températures t_1 et t_2, d'obtenir un travail aussi grand qu'on le veut ; car les quantités de chaleur q_1 et q_2 peuvent croître indéfiniment, sous la seule condition de demeurer proportionnelles à t_1 et t_2. Au contraire, avec le cycle de Clapeyron (dont la réalisation suppose l'emploi d'une suite continue de sources intermédiaires), ces quantités sont, comme on l'a vu, comprises entre $c(t_1 - t_2)$ et $C(t_1 - t_2)$, ce qui rend inévitable la limitation du travail.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Œuvres de* Pasteur. Tome V. *Études sur la Bière*. (Présenté par M. Roux.)

2° *Électrons et Photons*. Rapports et discussions du cinquième Conseil de Physique tenu à Bruxelles du 24 au 29 octobre 1927.

3° José Maria Torroja. *La Estereofotogrametria en* 1924 et une série de brochures sur la stéréophotogrammétrie et des sujets analogues par le même auteur. (Présentés par M. Ch. Lallemand.)

4° Le tome premier de la nouvelle série de la *Revue bryologique*. (Présenté par M. L. Mangin.)

Le **Général commandant l'École polytechnique** adresse des remercîments pour la subvention accordée sur la *Fondation Loutreuil*.

M. **Paul-Adolphe Serre** adresse des remercîments pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

THÉORIE DES PROBABILITÉS. — *Sur la convergence probable.* Note de M. **Maurice Fréchet**, présentée par M. Émile Borel.

Point de départ. — On sait les services que la notion de convergence *en mesure* a rendus dans la théorie des fonctions mesurables. Dans une Note de 1916 [1], nous avons montré que cette notion pouvait être définie par l'intermédiaire d'une définition convenable de la « *distance* » *de deux fonctions*.

Or, si l'on se donne une fonction mesurable $f(x)$ sur le segment 0-1, et si l'on choisit au hasard un point x sur ce segment, on peut considérer $f(x)$ comme *un nombre aléatoire*. On peut alors interpréter les notions de convergence en mesure et de distance de deux fonctions *dans le langage des probabilités*, lorsqu'on se place dans le cas d'une distribution uniforme.

On peut ensuite donner *un sens plus étendu* à cette interprétation, en considérant le cas plus général où x est le résultat fortuit d'une épreuve. On arrive ainsi, tout naturellement, à la notion de « convergence probable » dont nous allons donner la définition et à la conception de la *distance de deux nombres aléatoires* sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Définition de la convergence probable. — Soit $X, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de nombres aléatoires. Nous dirons que X_n *converge probablement vers* X si la probabilité $P_n(\varepsilon)$, que X_n diffère de X d'au moins la quantité donnée ε, est aussi petite que l'on veut à partir d'un certain rang n, autrement dit, *si* $\lim_{n \to \infty} P_n(\varepsilon) = 0$, *pour tout* ε *positif arbitraire.*

(Si l'on veut que la limite X soit unique, il faudra considérer comme *non distincts deux nombres aléatoires* « *presque toujours* » *égaux*, c'est-à-dire deux nombres aléatoires dont il y a une probabilité nulle qu'ils soient inégaux.)

Remarques. — Nous définissons ainsi la convergence probable dans un cas très général dont un cas particulier a été signalé depuis longtemps. Dans notre terminologie, le théorème de Bernoulli peut en effet s'énoncer ainsi : « La fréquence X_n d'un événement fortuit au cours de n épreuves tend *probablement* vers la probabilité de cet événement quand le nombre des épreuves croît indéfiniment. »

Dans de nombreux autres problèmes du Calcul des probabilités, se présente encore la convergence probable. Portant son attention sur *les cas où la limite* X *est un nombre certain*, M. Cantelli a eu l'heureuse idée d'étudier les circonstances générales qui se

---

[1] *L'écart de deux fonctions quelconques* (*Comptes rendus*, **162**, 1916, p. 304), Note développée dans le *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **11**, 1921, p. 187-206, sous le titre : *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable.* Voir aussi *Sur les ensembles compacts de fonctions mesurables* (*Fund. Math.*, **19**, 1926, p. 25-32).

produisent quand X_n, au lieu d'être une fréquence comme dans le théorème de Bernoulli, est un nombre aléatoire quelconque.

D'après lui, X_n converge « au sens du Calcul des probabilités » vers le nombre certain X, lorsque la probabilité de l'inégalité $|X - X_n| \leq \varepsilon$ tend vers l'unité (pour toute valeur positive de ε).

Le chemin que nous avons suivi devait nécessairement nous conduire au cas plus général où la limite de X_n est elle-même un nombre aléatoire. Se restreindre au cas de M. Cantelli reviendrait, en effet, dans le cas particulier qui nous a servi de point de départ, à ne vouloir envisager la convergence « en mesure » d'une suite de fonctions que dans le cas où la fonction limite est une constante. On ne saurait songer à imposer une telle limitation.

Premières propriétés. — Soit $F(x)$ la fonction de probabilité totale de X, c'est-à-dire la probabilité de l'inégalité $X \leq x$. Soit $F_n(x)$ celle de X_n.

Si X_n tend probablement vers X, $F_n(x)$ tend vers $F(x)$, sauf peut-être aux points de discontinuité de $F(x)$.

De même qu'une fonction mesurable peut converger « en mesure » et ne converger, en aucun point, au sens ordinaire; de même, si X_n converge probablement vers X, il peut arriver que, pour aucune épreuve, X_n ne converge au sens ordinaire. Mais, suivant encore l'analogie avec la convergence en mesure, on peut prouver la proposition suivante : *si une suite de variables aléatoires X_n converge probablement vers X, on peut extraire de cette suite une suite de variables $Y_p = X_{n_p}$ telle que :*

1° *La probabilité de la convergence de Y_p vers X est égale à l'unité;* 2° *la fonction de probabilité totale de Y_p converge partout;* 3° *quel que soit $\varepsilon > 0$, il y a un événement E_ε de probabilité $> 1 - \varepsilon$ et tel que Y_p converge uniformément vers X dans l'ensemble des épreuves où cet événement E_ε se produit.*

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les surfaces du troisième ordre possédant des courbes à branches enchaînées.* Note de Mme **M. Piazzolla-Beloch.**

Sur les surfaces générales du troisième ordre il y a des courbes *de degré $2m+1$, de genre $m-1$, à m branches deux à deux enchaînées.*

Soit F une surface du troisième ordre possédant 27 droites réelles. Étant donnée la droite r *elliptique* de la surface F, il suffit de construire $m-1$ plans $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_{m-1} = 0$, passant par r et assez proches les uns des autres, et considérer deux droites gauches s et t de la surface s'appuyant sur r de manière que les points d'appui soient extérieurs aux coniques, sections de la surface avec le plan α_i. Soit β un plan passant par t, et ne coupant pas ces coniques, et soit γ le plan rs.

Formons des autres plans $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{m-1}$, analogues aux plans $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, et soit β' un plan passant par s et ne coupant pas les coniques considérées, et soit γ' le plan rt.

Considérons le faisceau

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\beta\gamma + \lambda\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_{m-1}\beta'\gamma' = 0.$$

La surface de ce faisceau, qui s'obtient pour des valeurs assez petites de λ, coupe la surface du troisième ordre, au dehors des droites r, s et t, suivant une courbe de la nature envisagée.

Pour $m = 2$ on a des *courbes de cinquième degré et de genre* 1, *avec deux branches enchaînées.*

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur une classe de couples de congruences rectilignes stratifiables.* Note de M. S. **Rossinski**, présentée par M. Hadamard.

1° Dans une de ses Notes ([1]) M. L. Bianchi donne la solution complète du problème suivant : « Trouver tous les couples (r), (r') de congruences rectilignes stratifiables ([2]) dans lesquels deux rayons correspondants r, r' sont toujours orthogonaux et où, de plus, la perpendiculaire commune pp' à deux rayons passe par un point fixe O de l'espace. »

Le but de cette Note est de donner la solution complète (sauf un cas particulier) du problème A, que l'on peut considérer comme une extension immédiate du cas examiné par M. Bianchi :

Problème A. — *Trouver tous les couples (r), (r') de congruences rectilignes stratifiables dans lesquels deux rayons correspondants r, r' sont toujours orthogonaux et où, de plus, la perpendiculaire commune pp' à deux rayons est un rayon d'une congruence quelconque de normales.*

La solution du problème A dépend de l'intégration illimitée d'une équation en différentielles totales du type de Riccati; les conditions de l'intégration ont pour conséquence le théorème suivant :

Théorème. — *Les courbes tracées sur une surface (Σ) normale aux rayons pp' avec des tangentes parallèles aux rayons r, r' sont les lignes de courbure de cette surface.*

([1]) L. Bianchi, *Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili* (*Atti dei Lincei*, 5e série, 33, x, 2e sem. 1924, p. 369-377).

([2]) On trouvera une définition de la *stratification*, par exemple, dans la Note citée de M. Bianchi.

Soient (S) et (S′) deux familles de ∞^1 surfaces dont les points sont distribués respectivement sur les rayons (r) et (r') et les plans tangents passent par les rayons correspondants (r') et (r) en formant des faisceaux. On constate qu'aux lignes de courbure (u, v) de la surface (Σ) correspondent sur les surfaces S et S′ des lignes coordonnées formant sur les surfaces S et S′ *des systèmes conjugués* [S et S′ sont deux surfaces prises arbitrairement dans (S) et (S′)].

D'ailleurs M. A. Terracini [1] a montré que, dans le cas général, les lignes asymptotiques des surfaces S et S′ doivent se correspondre mutuellement.

2° Soient A et B les distances des points p et p' respectivement de la surface (Σ), distances comptées le long de la normale pp'. La recherche des surfaces (Σ) qui sont des surfaces w pour lesquelles on a $f(r_1, r_2) = 0$ dépend, si $\frac{\partial A}{\partial u} \neq 0$ et $\frac{\partial B}{\partial v} \neq 0$, de l'équation

$$\left(\frac{c}{\theta} + \theta\right)^2 \left(1 - \frac{d\theta}{dr_1}\right) + c_1 \left(2 - \frac{d\theta}{dr_1}\right)^2 = 0,$$

où $\theta = r_1 - r_2$, $c = \text{const.}$, $c_1 = \text{const.}$; cette équation s'intègre facilement. L'une de ces intégrales particulières conduit aux surfaces w bien connues pour lesquelles $r_1 - r_2 = \text{const.} = \pm\sqrt{c}$. Une autre solution particulière

$$\theta = 2r_1 + \text{const.}$$

de cette équation ne conduit pas à des solutions nouvelles du problème et, par conséquent, (Σ) ne peut être une surface minima.

Si $\frac{\partial B}{\partial v}$, par exemple, est nulle, (Σ) est une *surface de révolution*; si $\frac{\partial A}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial B}{\partial v} = 0$ simultanément, (Σ) est un *cylindre de révolution* ou *un plan*. Dans le cas où A (ou B) est une constante, la surface (Σ) est une *surface des canaux*, si $A + r_1 = 0$ (ou $B + r_2 = 0$), ou une *surface* développable si $B = \text{const.}$ (ou $A = \text{const.}$). En tout cas, à l'exception de $A = \text{const.}$ (ou $B = \text{const.}$), B doit être une fonction de A.

3° La méthode que j'ai suivie m'a permis de trouver toutes les solutions du problème A, sauf dans un cas qui exige des calculs très compliqués. On constate qu'à l'exception des cas trivials et déjà indiqués, A et B peuvent

[1] A. Terracini, *Caratterizzazione dei sistemi del Bianchi di ∞^1 superficie* (*Atti dei Lincei*, 6e série, 4, IX, 2e sem. 1926, p. 348-352).

s'exprimer par les formules suivantes :

$$(a)\quad A=\frac{1}{2}\sqrt{k_1e^{c\varphi}+k_2e^{-c\varphi}}+\frac{2k}{c}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{k_1e^{c\varphi}+k_2e^{-c\varphi}}}+\frac{c}{4}\int\sqrt{k_1e^{c\varphi}+k_2e^{-c\varphi}}\,d\varphi,$$

$$B=A-\sqrt{k_1e^{c\varphi}+k_2e^{-c\varphi}};$$

$$(b)\qquad A=\frac{2k}{c}e^{\frac{c\varphi}{2}+c'}+c'',\qquad B=-\frac{2k}{c}e^{\frac{-c\varphi}{2}-c'}+c'';$$

$$(c)\qquad A=k_0\varphi+\overline{k_1},\qquad B=-k_0\varphi+\overline{k_2},$$

où k, k_0, k_1, k_2, $\overline{k_1}$, $\overline{k_2}$, c, c', c'' sont des constantes. Dans ces formules on peut considérer A et B comme fonctions d'un paramètre φ; ce paramètre dans chacun des trois cas indiqués est une fonction bien déterminée de u et v.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'équation intégrale d'Abel généralisée.* Note de M. **Radu Bădesco**, présentée par M. Hadamard.

La solution $\Phi(z,\lambda)=\Sigma\lambda^n u_n(z)$ de l'équation intégrale qui généralise celle d'Abel,

$$(1)\qquad \Phi(z,\lambda)-\lambda\left\{F(z)\Phi(\alpha z,\lambda)+\int_a^b K(z,s)\Phi(zs,\lambda)\,ds\right\}=\Psi(z),$$

a été l'objet d'une étude approfondie de M. Browne [1], qui a introduit d'une manière indirecte les singularités dans le plan de λ, en déduisant que $\Phi(z,\lambda)$ est une fonction méromorphe de cette variable. Nous nous sommes placés, pour étudier l'équation (1), à un autre point de vue; la recherche des séries de Taylor $\Phi(z)=\Sigma z^n\Phi_n(\lambda)$ satisfaisant à cette équation. C'est la forme sous laquelle Abel désirait obtenir cette solution. Nous traitons seulement le cas où les fonctions données $F(z)$, $\Psi(z)$ et $K(z,s)$ sont holomorphes et bornées dans un certain domaine D, simplement connexe, pour avoir les résultats de la manière la plus simple, mais la méthode s'étend aussi à d'autres cas.

Soient F et K les bornes supérieures de $F(z)$ et $K(z,s)$, $[a\leq s\leq b]$ dans D, et désignons par $\Phi(\lambda)$ la solution envisagée par M. Browne. L'équation intégrale

$$\overline{\Phi}(z,\lambda)-\lambda\left\{F\overline{\Phi}(|\alpha|z,\lambda)+\int_a^b K\Phi(zs,\lambda)\,ds\right\}=\overline{\Psi}(z)$$

---

(1) *Thèses*, Paris, 1913.

admet la solution holomorphe

$$\overline{\Phi}(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \overline{\Psi}_n}{1 - \lambda \left\{ F|\alpha|^n + \frac{K}{n+1}[b^{n+1} - a^{n+1}] \right\}},$$

qui sera une majorante pour $\Phi(\lambda)$, $\overline{\Psi}(z) = \Sigma z^n \overline{\Psi}_n$ étant une majorante pour $\Psi(z)$. Les conditions nécessaires pour la convergence de $\Phi(\lambda)$ sont donc

$$\lambda < \frac{1}{F + K(b - a)} \qquad (|b| \leqq 1,\ |a| \leqq 1,\ |\alpha| \leqq 1),$$

les trois dernières exprimant que les singularités polaires de $\Phi(\lambda)$ s'accumulent à l'extérieur d'un cercle ayant l'origine pour centre.

Pour avoir le rayon de convergence de $\Phi(z)$ par cette méthode, on devrait se borner seulement au cas où $|\alpha|$ est plus grand que $|a|$ ou $|b|$, mais on peut le calculer d'après la forme de la solution même que nous indiquerons dans la suite. Divisons l'équation (1) par $2\pi i . z^{n+1}$ et intégrons-la le long d'un cercle (Γ) ayant l'origine pour centre et situé dans (1). Nous avons

$$\Phi_n(\lambda) - \lambda \left\{ \sum_{p=0}^{n} F_p \alpha^{n-p} \Phi_{n-p}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{n+1}} \int_a^b K(z, s) \Phi(zs)\, ds \right\} = \Psi_n$$

où F_n et Ψ_n sont les coefficients de z^n dans les développements de $F_n(z)$ et $\Psi(z)$. Ajoutons et retranchons à $\Phi(zs)$ sous le signe $\int$ la somme

$$-\sum_{p=0}^{n} (zs)^p \Phi_p(\lambda).$$

La première fonction ainsi obtenue

$$\left[\Phi(zs) - \sum_{p=0}^{n} (zs)^p \Phi_p(\lambda) \right]$$

est holomorphe dans D et aura un zéro d'ordre $(n+1)$ à l'origine ; le développement de l'intégrale du produit de $K(z, s)$ par cette fonction nous donnera une fonction holomorphe dans D, d'après les hypothèses faites, et commencera par z^{n+1}. Nous obtenons alors la relation de récurrence

$$\Phi_n(\lambda) \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_n} \right] - \lambda \sum_{p=1}^{n} \mu_p \Phi_{n-p}(\lambda) = \Psi_n$$

où

$$\lambda_n^{-1} = F_0 \alpha^n + \int_a^b K(o, s) s^n \, ds, \qquad \mu_p = \alpha^{n-p} F_p + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{p+1}} \int_a^b K(z, s) s^{n-p} \, ds$$

et qui met en évidence les singularités λ_n de $\Phi(\lambda)$. Nous tirons de là l'expression de $\Phi_n(\lambda)$ sous la forme d'un quotient de deux polynomes $\frac{\varphi_n(\lambda)}{\pi_{n+1}(\lambda)}$, de degrés égaux aux indices en général, $\varphi_n(\lambda)$ étant un déterminant qu'on peut facilement calculer. Si $F_0 = o$ et $K(o, s) = o$, $\Phi(z, \lambda)$ est la fonction génératrice, au sens de Laplace, de la suite de polynomes $\varphi_n(\lambda)$; c'est une fonction entière de λ. Tel est le cas de l'équation de M. Volterra.

Pour obtenir la solution de l'équation homogène (1) [$\Psi \equiv o$], multiplions cette équation par le produit infini convergent

$$\Pi(\lambda) = \prod_{i=0}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right] e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j),$$

et comme la fonction $\Phi(z, \lambda)\Pi(\lambda)$ converge dans le cercle de rayon $R = \liminf_{i=\infty} \lambda_i$ (ce que l'on voit facilement), nous pouvons faire $\lambda = \lambda_n$. Nous obtenons une suite dénombrable de fonctions fondamentales

$$\Pi(\lambda_n)\Phi(z, \lambda_n) = \sum_{p=0}^{\infty} z^{n+p} \varphi_{n+p}(\lambda_n) \prod_{q=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda_{n'}}{\lambda_{n+p+q}}\right] \qquad [n = o, 1, \ldots]$$

correspondant aux valeurs caractéristiques λ_n, situées à l'intérieur du cercle de rayon R. Pour les autres valeurs de λ intérieures, l'équation homogène n'admet de solution analytique que $\Phi(z, \lambda) \equiv o$. Si $\Psi(z) \neq o$ et $\lambda = \lambda_n$, la même relation de récurrence donne les coefficients $\Phi_p(\lambda_n)$, sauf $\Phi_n(\lambda_n)$ qui est arbitraire.

La condition nécessaire pour la possibilité du problème dans ce cas (que M. Browne n'a pas formée) est donc donnée par une relation entre les $(n+1)$ coefficients Ψ_p du développement de $\Psi(z)$, $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$. La méthode employée met en évidence d'une manière élémentaire toutes les propriétés signalées par M. Browne ainsi que d'autres propriétés dont nous parlerons dans un article plus détaillé. Nous réduisons ainsi l'étude de (1) à l'étude d'une relation de récurrence, qui permet aussi la recherche des solutions pour des fonctions méromorphes données.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les singularités d'une classe de séries de Dirichlet.* Note de M. **Srivastava**, présentée par M. Hadamard.

Je désire signaler une liaison remarquable qui existe entre les séries

$$(1)\qquad H(s)=\sum_{1}^{\infty}\varphi(\log n)\,n^{-(s+1)}$$

et

$$(2)\qquad F(s)=\sum_{0}^{\infty}\varphi(n)\,e^{-sn}\qquad (s=\sigma+it),$$

où φ satisfait aux conditions suivantes :

I. $\varphi(z)$ est une fonction analytique de z $(z=\rho e^{i\psi})$ dans l'angle $|\psi|\leqq\alpha$ avec $\alpha\geqq\frac{\pi}{2}$;

II. $\varphi(z)=O(e^{k\rho})$ dans tout cet angle, avec $k<\pi$.

Faisant usage d'une formule de Lindelöf [1], nous pouvons établir l'équation

$$(3)\qquad H(s)=\frac{1}{2}\varphi(0)+\int_{1}^{\infty}\varphi(\log x)\,x^{-(s+1)}\,dx + i\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi[\log(1+ix)](1+ix)^{-s-1}-\varphi[\log(1-ix)](1-ix)^{-s-1}}{e^{2\pi x}-1},$$

où nous pouvons montrer que la dernière intégrale représente une fonction entière de s, de sorte que

$$(4)\qquad H(s)=G(s)+\int_{0}^{\infty}\varphi(z)\,e^{-sz}\,dz=G(s)+J(s),$$

$G(s)$ étant une fonction entière de s. Or,

$$J(s)=J(s,\psi),$$

où

$$(5)\qquad J(s,\psi)=\int_{0}^{\infty(\psi)}\varphi(z)\,e^{-sz}\,dz\qquad \left(|\psi|\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

l'intégrale étant prise le long d'un rayon vecteur faisant l'angle ψ avec la partie positive de l'axe réel. Il en résulte que $J(s)$ est une fonction analy-

---

[1] *Le calcul des résidus*, p. 61.

tique de s, en dehors de l'enveloppe de la famille de lignes donnée par

$$\sigma \cos\psi - t \sin\psi = k + \varepsilon > k; \tag{6}$$

donc, en dehors du demi-cercle $\sigma^2 + t^2 = (k+\varepsilon)^2$ situé à droite de l'axe imaginaire complété par les tangentes à ces extrémités prolongées indéfiniment vers la gauche.

Ainsi toutes les singularités de $J(s)$ sont situées dans la bande $|t| \leqq \pi$.

Appliquant à nouveau la même formule à laquelle nous avons fait allusion plus haut, on a, pour $|t| \leqq \pi$,

$$F(s) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \int_0^\infty \varphi(z) e^{-sz} dz + i \int_0^\infty \frac{\varphi(ix) e^{-six} - \varphi(-ix) e^{six}}{e^{2\pi x} - 1} dx, \tag{7}$$

où la dernière intégrale, comme on peut le montrer, est encore une fonction analytique de s dans toute partie finie de la bande $|t| \leqq \pi$, soit

$$F(s) = g(s) + J(s), \tag{8}$$

$g(s)$ étant analytique dans toute partie finie de la bande en question.

Comparant maintenant (4) et (8), nous concluons immédiatement que toutes les singularités à distance finie de $H(s)$ sont identiques à celles de $J(s)$ qui sont toutes comprises dans la bande $|t| \leqq \pi$ et qui sont les seules singularités à distance finie de $F(s)$ dans cette bande. Nous avons donc le théorème suivant :

Si $\varphi(z)$ *satisfait aux conditions* I *et* II, *toutes les singularités à distance finie de* $H(s)$ *sont identiques à celles de* $F(s)$ *situées dans la bande* $|t| \leqq \pi$.

On voit que toutes les fois que les singularités d'une série de Taylor

$$\sum_0^\infty \varphi(x) x^n$$

sont connues, celles de $H(s)$ peuvent être trouvées.

Supposons, par exemple, dans I, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la fonction $\varphi(z)$ vérifiant, d'autre part, l'égalité asymptotique

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log|\varphi(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = \psi \sin\psi + \cos\psi \log\cos\psi \tag{9}$$

pour $|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$; il résulte alors d'un travail [1] de M. F. Carlson que la courbe

$$\sigma = \log\cos t \qquad \left(|t| \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{10}$$

---

(1) *Sur une classe de séries de Taylor* (*Thèse de Doctorat*, Upsal, 1914).

est une ligne singulière pour la fonction $F(s)$ et, par conséquent, aussi pour $H(s)$.

Le théorème précédent n'est plus vrai si, dans (II), k est supérieur ou égal à π, ainsi qu'on peut le voir en prenant $\varphi(z)=\sin\pi z$. Mais dans ce cas nous pourrons choisir un nombre positif a tel que $ak<\pi$ et montrer alors que toutes les singularités finies de

$$F(s')=\sum_{0}^{\infty}\varphi(an)e^{-s'n},$$

dans la bande $|t'|\leqq\pi$, une fois transportées au plan des s par la substitution $s'=as$, sont identiques à celles de la quantité $H(s)$ définie par (1).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'unicité du système de fonctions orthogonales invariant relativement à la dérivation.* Note de M. **B. Gagaeff**, présentée par M. Hadamard.

1. On sait que les fonctions trigonométriques

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$$

offrent un exemple classique d'un système formé de fonctions orthogonales deux à deux et invariant (aux facteurs numériques près) relativement à la dérivation.

La question se pose de savoir (1) s'il existe un *autre* système formé d'une *infinité* de fonctions continues

$$\varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots$$

définies et orthogonales deux à deux dans un intervalle et invariant relativement à la dérivation (aux facteurs numériques près).

Le but de cette Note est de donner la réponse *négative :* le système trigonométrique classique est le seul système de cette nature.

2. Soit

$$(1)\qquad \varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots$$

un système *infini* de fonctions continues et orthogonales deux à deux dans

---

(1) Voir la Thèse de M. N. Lusin, *L'intégrale et la série trigonométrique* (*Recueil mathématique de Moscou*, 30, 1916, p. 5).

$(0 \leqq x \leqq 1)$ et invariants (aux facteurs numériques près) relativement à la dérivation. Donc, la suite des dérivées $\varphi'_0(x), \varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \ldots, \varphi'_n(x), \ldots$ coïncide (à l'ordre et aux facteurs numériques près) avec la suite donnée (1) des fonctions elles-mêmes. Ainsi, chaque dérivée $\varphi'_n(x)$ doit être écrite dans la suite donnée (1). Il en résulte que les fonctions considérées $\varphi_n(x)$ sont toutes *indéfiniment dérivables* dans $(0, 1)$.

En général, la dérivation fait un déplacement d'une fonction $\varphi_n(x)$ dans la suite donnée (1) puisque l'indice de la fonction dérivée $\varphi'_n(x)$ considérée comme un terme de la suite (1) diffère de n. En effet, dans le cas contraire, nous aurons l'équation différentielle $\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \lambda\varphi_n(x)$, où λ est un facteur numérique. Donc, une telle fonction $\varphi_n(x)$ ne peut pas changer de signe dans $(0, 1)$ puisqu'elle est de la forme $Ce^{\lambda x}$, C étant une constante. Or, toutes les fonctions de la suite (1) sont orthogonales deux à deux dans $(0, 1)$. Nous sommes ainsi amenés à conclure qu'il ne peut exister, dans la suite (1), qu'*une seule* fonction qui ne se déplace pas par la dérivation. Nous supposons que $\varphi_0(x)$ est une telle fonction.

Cela posé, considérons deux fonctions : $\varphi_n(x)$ et $\varphi'_n(x)$, $n > 0$. Comme ces fonctions ont des indices différents dans la suite (1), nous avons

$$\int_0^1 \varphi_n \varphi'_n \, dx = 0.$$

Donc $\varphi_n^2(1) = \varphi_n^2(0)$ et par suite $\varphi_n(1) = \varepsilon_n \varphi_n(0)$, où $\varepsilon_n = \pm 1$ quel que soit l'entier positif n. De même, on a $\varphi'_n(1) = \varepsilon'_n \varphi'_n(0)$, où $\varepsilon'_n = \pm 1$.

Ceci observé, l'application de l'intégration par parties nous donne

$$(2) \qquad \int_0^1 \varphi_n \varphi''_n \, dx = \varphi_n(0)\varphi'_n(0)(\varepsilon_n \varepsilon'_n - 1) - \int_0^1 (\varphi'_n)^2 \, dx.$$

On déduit immédiatement de cette égalité que *si le produit* $\varphi_n(0)\varphi'_n(0)$ *est égal à zéro*, ou bien *si nous avons* $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$ la fonction φ''_n ne peut pas être orthogonale à φ_n. Donc, φ''_n est identique à φ_n (à un facteur numérique *négatif* près). Nous sommes ainsi amenés, dans ce cas, à l'équation différentielle $\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2} = -k^2\varphi_n(x)$, d'où l'égalité

$$\varphi_n(x) = \rho \cos(kx + \alpha),$$

ρ et α étant des constantes numériques. Il résulte aussitôt de là que l'un au moins des nombres $\varphi_n(0)$ et $\varphi'_n(0)$ diffère de zéro puisque dans le cas contraire, $\rho = 0$ et la fonction $\varphi_n(x)$ s'annule partout dans $(0, 1)$.

3. Je dis maintenant que : *ou bien* le produit $\varphi_n(0)\varphi'_n(0)$ est égal à zéro, *ou bien* $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$ quel que soit l'entier positif n.

En effet prenons un terme quelconque $\varphi_m(x)$ de la suite (1), $m > 0$. L'intégration par parties nous donne

(3) $$\int_0^1 \varphi_m \varphi'_n \, dx = \varphi_m(0)\varphi_n(0)(\varepsilon_m \varepsilon_n - 1) - \int_0^1 \varphi'_m \varphi_n \, dx,$$

et

(4) $$\int_0^1 \varphi_m \varphi''_n \, dx = \varphi_m(0)\varphi'_n(0)(\varepsilon_m \varepsilon'_n - 1) - \int_0^1 \varphi'_m \varphi'_n \, dx.$$

Comme chaque terme de la suite (1) est la dérivée (à un facteur numérique près) d'un autre terme de cette suite, nous pouvons écrire *cinq* lettres φ_p, φ_q, φ_n, φ'_n et φ''_n dont chacune est un terme de la suite (1), chaque lettre suivante est une dérivée (à un facteur numérique près) de la lettre précédente.

Cela posé, prenons un terme $\varphi_k(x)$ de la suite (1) différent de ces cinq lettres. Il est clair que deux fonctions $\varphi_k(x)$ et $\varphi'_k(x)$ sont orthogonales aux fonctions φ_n, φ'_n et φ''_n et l'une au moins d'elles ne s'annule pas pour $x = 0$; nous la désignons par $\varphi_m(x)$.

Puisque toutes les intégrales des formules (3) et (4) sont maintenant nulles et comme $\varphi_m(0)$ diffère de zéro, nous concluons que si le produit $\varphi_n(0)\varphi'_n(0)$ diffère de zéro, on a sûrement $\varepsilon_m \varepsilon_n - 1 = 0$ et en même temps $\varepsilon_m \varepsilon'_n - 1 = 0$, ce qui entraîne $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$.

Ainsi tous les termes $\varphi_n(x)$, $n > 0$ sont de la forme $\rho \cos(kx + \alpha)$ et l'orthogonalité deux à deux de ces fonctions nous amène aussitôt à ce que $2\pi k$ est un *entier positif* et que la fonction $\varphi_0(x) = Ce^{\lambda x}$ est une constante, puisque $\lambda = 0$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les maximums et minimums des fonctions uniformes de variables réelles.* Note de M. **Alex. Froda**, présentée par M. Émile Borel.

En étendant les définitions habituelles, applicables aux fonctions continues, on peut les préciser en convenant de dire qu'une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles présente un *maximum strict* (*atteint*) en un certain point $\mathfrak{P}$ si l'inégalité $f(\mathfrak{P}) > f(P)$ est satisfaite pour tout point $P \neq \mathfrak{P}$, appartenant à un domaine D à n dimensions et contenant $\mathfrak{P}$ intérieurement.

Désignons toujours ([1]) par $M_0(P)$ le maximum de $f(P)$ au voisinage du point P et convenons de dire que $f(P)$ présente *un maximum strict* (*non atteint*), au point $\mathfrak{P}$, si l'on a $f(\mathfrak{P}) < M_0(\mathfrak{P})$ en même temps que

$$M_0(\mathfrak{P}) > M_0(P) \geqq f(P) \quad ({}^2)$$

pour tout $P \neq \mathfrak{P}$ et appartenant au domaine D. On a la proposition :

I. *Toute fonction uniforme $f(P)$ de variables réelles ne peut présenter, tout au plus, qu'une infinité dénombrable de maximums stricts* (*atteints ou non*).

Soient, en effet, E l'ensemble des points $\mathfrak{P}$, où $f(P)$ présente un maximum strict (atteint) et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ une suite de nombres positifs, décroissant vers zéro. On peut enfermer chaque $\mathfrak{P}$ de E en une sphère S de centre $\mathfrak{P}$ et de rayon $\delta(\mathfrak{P})$, où $f(\mathfrak{P}) > f(P)$ pour tout $P \neq \mathfrak{P}$, en gardant pour chaque δ la plus grande des valeurs des ε_q qui conviennent. Si $\Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'')$ est la distance de $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ quelconques en E, l'une au moins des inégalités

$$\delta(\mathfrak{P}') \leqq \Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'') \quad \text{et} \quad \delta(\mathfrak{P}'') \leqq \Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'')$$

est valable. Mais $E[\delta(\mathfrak{P}) > 0]$ égale la somme des $E_q[\delta(\mathfrak{P}) = \varepsilon_q]$. Or chaque E_q est dénombrable, car $\Delta(\mathfrak{P}', \mathfrak{P}'') > \varepsilon_q$, pour $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ quelconques en E_q et dont la somme E des ensembles isolés E_q est dénombrable.

Soit G l'ensemble des points $\mathfrak{P}$, où $f(P)$ présente un maximum strict (non atteint). On a $M_0(\mathfrak{P}) > M_0(P)$ et la fonction $M_0(P)$ présente aux points $\mathfrak{P}$ de G un maximum strict (atteint), donc G est aussi dénombrable.

Des définitions et résultats analogues s'appliquent aux minimums. Même remarque si $f(P)$ n'était définie que sur un ensemble parfait.

Complétons, à cette occasion, des résultats antérieurs ([1]). Supposons définie, d'une certaine manière, une classe A d'ensembles, telle que : *a*. Tout ensemble dénombrable est un A ; *b*. La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles A est un A. Les classes des ensembles dénombrables, ou de première catégorie, ou de mesure nulle, représentent chacune des exemples de classes A.

On peut définir ([3]) le maximum $M_A(\mathfrak{P})$ et minimum $m_A(\mathfrak{P})$ de $f(P)$ au point $\mathfrak{P}$, lorsqu'on néglige les ensembles de classe A.

II. *Pour tout point $\mathfrak{P}$ du domaine de définition de $f(P)$, sauf tout au plus*

([1]) Voir *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 274.

([2]) La condition moins stricte $M_0(\mathfrak{P}) > f(P)$ définirait un maximum, qui pourrait se présenter partout, en D.

([3]) Cf. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration, etc.*, 1928, p. 87.

pour un ensemble de classe A *des valeurs de* $\mathfrak{T}$ *on a* $m_A(\mathfrak{T}) \leqq f(\mathfrak{T}) \leqq M_A(\mathfrak{T})$. La démonstration reproduira celle indiquée dans une Note précédente.

En remplaçant la condition a par celle plus serrée : Tout sous-ensemble de A est un A, la proposition II se démontre, assez délicatement, à l'aide du lemme classique de M. Borel (1), intimement lié à la nature de la question.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Les principes d'une théorie générale du choc.* Note (2) de M. **Z. Horak**.

La théorie générale du choc, instituée par M. Appell dans le Mémoire : *Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions* (3), offre des équations linéaires qui suffisent pour déterminer les vitesses d'un système après le choc, en se bornant, bien entendu, au cas des liaisons persistantes. Ces liaisons correspondent au choc des corps parfaitement mous, tandis que l'étude du choc parfaitement ou imparfaitement élastique exige la considération des liaisons non persistantes, n'ayant lieu qu'au moment du choc. Les corps parfaitement mous et ceux parfaitement élastiques pouvant être considérés comme les cas limites des corps imparfaitement élastiques, nous allons considérer le cas général d'un choc imparfaitement élastique. Pour obtenir, même dans ce cas-ci, le nombre suffisant des équations, il est nécessaire de compléter la théorie par des hypothèses nouvelles. C'est dans la Note présente que je vais montrer qu'on peut trouver les lois du choc, même pour un système général, en appliquant à la variété de ses configurations les notions du calcul différentiel absolu. Or, dans mon travail : *Sur les systèmes non holonomes* (*Bulletin international de l'Académie de Bohême*, 1928), j'ai considéré le mouvement d'un système dynamique quelconque comme le déplacement d'un point dans une variété riemannienne dont la forme fondamentale est proportionnelle à la demi-force vive et j'y ai énoncé le principe suivant : *Le changement de la quantité de mouvement d'un système est égal à la force résultante*. C'est l'analogie parfaite, ainsi établie, de la dynamique d'un système avec celle d'un point qui m'a conduit des lois valables pour le choc d'un point sur un plan aux lois générales.

---

(1) É. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905, p. 9.

(2) Séance du 26 décembre 1928.

(3) *Journal de Math. pures et appliquées*, 5e série, 2, 1896, p. 5-20.

Soit un système à n degrés de liberté soumis, au moment du choc, à r liaisons non persistantes. Les déplacements virtuels compatibles avec ces liaisons sont placés dans une s-direction ($s = n - r$) que je vais appeler *tangentielle*, en désignant la r-direction normale à cette s-direction comme *normale*. Les dérivées par rapport au temps $\dot{q}^k$ des paramètres q^k ($k = 1, 2, \ldots, n$) sont les composantes de la vitesse du système et les dérivées partielles de la demi-force vive $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = I_k$ sont des composantes de la quantité de mouvement du système. Cela posé, la vitesse après le choc d'un système de corps parfaitement mous et polis est déterminée par les équations données par M. Appell, lesquelles peuvent être exprimées par les deux théorèmes suivants : I. *La composante tangentielle de la quantité de mouvement ne se change pas par le choc.* II. *La composante normale de la vitesse après le choc est nulle.* Si le choc est imparfaitement élastique, le théorème I restant valable, le théorème II doit être remplacé par une hypothèse plus générale :

II. *La composante normale de la vitesse après le choc :*

a. est une fonction linéaire de la composante normale de la vitesse avant le choc :

b. elle ne la dépasse pas en grandeur;

c. sa direction fait avec celle avant le choc un angle obtus.

C'est là mon extension des lois connues du choc imparfaitement élastique pour les systèmes généraux, dont l'expression analytique s'obtient comme suit. Si l'on écrit les liaisons non persistantes (réalisées sans frottement et, en général, non holonomes et rhéonomes) sous la forme

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} P_k^u \dot{q}^k + P^u = 0 \qquad (u = 1, 2, \ldots, r),$$

on peut, au moment du choc, exprimer les $\dot{q}^k$ au moyen de s quantités indépendantes $'\dot{q}^a$ ($a = 1, 2, \ldots, s$) :

$$\dot{q}^k = \sum_{a=1}^{s} Q_a^k \, '\dot{q}^a + Q^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Or la composante tangentielle de la quantité de mouvement peut être déterminée par les s expressions $\sum_k Q_a^k I_k$ et la composante normale de la vitesse par les r expressions (1), de sorte que les théorèmes I et II, a

donnent les équations

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{n} Q_a^k (I_k)_1 = \sum_{k=1}^{n} Q_a^k (I_k)_0,$$

$$\text{(II}_a\text{)} \qquad \sum_{k=1}^{n} P_k^u (\dot{q}^k)_1 + P^u = \sum_{\nu=1}^{r} E_{.\nu}^u \left[\sum_{k=1}^{n} P_k^\nu (\dot{q}^k)_0 + P^\nu \right].$$

Ces n équations déterminent les composantes $(\dot{q}^k)_1$ de la vitesse après le choc au moyen des composantes $(\dot{q}^k)_0$ de la vitesse avant le choc, si l'on connaît les coefficients $E_{.\nu}^u$. Ces quantités, constituant un affineur, doivent remplir certaines conditions algébriques qui résultent des théorèmes II, b, c.

Quant aux résultats fournis par la théorie, je renvoie au Mémoire plus détaillé qui paraîtra ultérieurement.

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — *Sur une propriété générale du mouvement d'un système de points matériels.* Note (¹) de M. **J. Le Roux**, présentée par M. G. Kœnigs.

La force vive du mouvement relatif d'un ensemble de points matériels, considéré successivement par rapport à des systèmes de référence différents, varie évidemment avec le système de référence.

Il existe un système spécial auquel correspond un minimum de la force vive relative. Je me propose de le déterminer et d'en étudier les propriétés fondamentales.

Je suppose d'abord le mouvement rapporté à un système d'axes rectangulaires S. Soit S_0 un second système de référence, mobile par rapport au premier.

Le mouvement de S par rapport à S_0 est défini par une translation et une rotation, dont je désigne les composantes respectivement par ξ, η, ζ et p, q, r.

On connaît l'expression des composantes, suivant les axes de S, de la vitesse relative d'un point $M(x, y, z)$ par rapport à S_0. Elles sont données par les formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_x &= \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt}, \\ V_y &= \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt}, \\ V_z &= \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right.$$

(¹) Séance du 26 décembre 1928.

La détermination de notre système de référence spécial nécessite donc la solution préalable du problème suivant :

Calculer les valeurs des six paramètres ξ, η, ζ, p, q, r *correspondant au minimum de l'expression*

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2), \tag{2}$$

la somme Σ *étant étendue à tous les éléments de l'ensemble mobile.*

En annulant les dérivées partielles de T par rapport aux paramètres considérés on obtient six équations du premier degré qui définissent sans ambiguïté les six inconnues. Ces équations appartiennent aux deux types suivants :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \Sigma m V_x = 0, \quad \ldots; \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \Sigma m(y V_z - z V_y) = 0, \quad \ldots. \tag{4}$$

Pour achever de déterminer les axes du système S_0 il resterait à résoudre un système d'équations différentielles de forme bien connue.

On sait qu'il existe une infinité de solutions, mais que toutes ces solutions représentent des systèmes d'axes invariablement liés les uns aux autres. On peut dire que leur ensemble constitue un *solide de référence* Σ que j'appelle le *solide de référence spécial de l'ensemble considéré.*

L'interprétation des équations (3) et (4) fournit immédiatement les propriétés suivantes :

I. *Le centre de gravité de l'ensemble mobile est fixe dans* Σ.

II. *Le moment résultant des quantités de mouvement de l'ensemble est constamment nul dans le mouvement relatif par rapport à* Σ.

De ces propositions on déduit une conséquence importante.

III. *Les forces susceptibles de produire le mouvement de l'ensemble, tel qu'il a lieu par rapport au solide* Σ, *seraient assimilables à des forces intérieures, au sens de la mécanique classique : elles se feraient équilibre à tout instant si l'ensemble était solidifié dans la configuration qu'il forme à l'instant considéré.*

Ainsi les forces apparentes pourraient être assimilées, en général d'une infinité de manières, à des résultantes d'actions mutuelles, deux à deux égales et directement opposées.

Toutefois l'action mutuelle de deux éléments dans les systèmes généraux ne serait pas nécessairement indépendante des autres éléments.

Il existe d'ailleurs une infinité de solides de référence qui jouissent de la propriété énoncée au n° III. Ce sont tous ceux qui peuvent être définis en

remplaçant dans les équations (3) et (4) les seconds membres par des constantes quelconques.

La considération du solide référence spécial Σ conduit à la proposition suivante, qui complète et généralise le théorème de Kœnig :

IV. *La force vive d'un système, dans son mouvement relatif par rapport à un solide de référence quelconque* S, *est égale à la force vive du mouvement relatif par rapport au solide spécial* Σ *augmentée de la force vive due au mouvement d'entraînement de* Σ *par rapport à* S.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Sur la liaison entre l'absence de pressions négatives et le sens de la concavité des lignes de jet dans le mouvement plan d'un fluide incompressible autour d'un obstacle.* Note (1) de M. **J. Kampé de Fériet.**

Dans une Note récente (2), j'ai indiqué une condition nécessaire devant être vérifiée par la fonction de profil $\Phi(\sigma)$, pour qu'en tout point d'un fluide plan en mouvement permanent irrotationnel autour d'un obstacle donné on ait pour la vitesse $V \leq 1$, inégalité qui, elle-même, entraîne l'absence de pressions négatives dans le fluide, quelle que soit la pression, positive ou nulle dans le sillage. M. H. Villat (3) a remarqué que la condition indiquée s'interprétait très simplement : elle exprime que les deux lignes de jet, séparant le fluide en mouvement du sillage au repos, sont concaves vers le sillage au point à l'infini. En poursuivant le rapprochement suggéré par cette remarque élégante, on aboutit à cette proposition beaucoup plus générale : *si, en tout point du fluide en mouvement la vitesse* V *est inférieure à* 1, *les deux lignes de jet sont nécessairement concaves vers le sillage.* Cette proposition a déjà été énoncée notamment par M. Marcel Brillouin (4), mais dans un Mémoire où il se préoccupe surtout de l'interprétation physique du problème. On peut la démontrer aisément tout en

(1) Séance du 7 janvier 1929.

(2) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 47; la position du problème et les notations restent celles de l'Ouvrage, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (*Coll. Scientia*), par H. Villat.

(3) *Comptes rendus*, **188**, 1929, p. 49.

(4) Marcel Brillouin, *Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 8e série, **23**, 1911; voir surtout p. 150 et 165).

la précisant en partant du théorème suivant [1] : « Soient un domaine D, ayant pour frontière une courbe simple fermée F et $w = f(z)$ une fonction, régulière à l'intérieur de D où l'on a $\mathcal{R}(w) > 0$, et continue sur un arc ab de F où l'on a $\mathcal{R}(w) = 0$; quand z décrit ab dans le sens positif, $\mathcal{I}(w)$ décroît constamment. » Ceci posé, considérons la fonction $i\Omega(\zeta)$ définie dans le demi-cercle $\mathcal{C}$ et pour laquelle $\mathcal{R}(i\Omega) = 0$ sur le diamètre de $\mathcal{C}$; pour pouvoir appliquer l'énoncé précédent, il suffit qu'il existe un domaine dont un segment ab du diamètre de $\mathcal{C}$ soit une portion de la frontière et à l'intérieur duquel on ait $\mathcal{R}(i\Omega) = -T > 0$, ce qui entraîne $V < 1$ pour les points correspondants du fluide; il résulte alors du théorème que $\mathcal{I}(i\Omega) = \Theta$ décroît constamment quand ζ décrit ab dans le sens positif.

Par conséquent, étant donné un arc PQ *d'une ligne de jet, s'il existe, dans le fluide en mouvement, un voisinage, si petit soit-il, de cet arc où l'on ait constamment* $V < 1$, *l'arc* PQ *est nécessairement concave vers le sillage; donc si en un point* P *une ligne de jet est convexe vers le sillage ou même admet une inflexion, on peut affirmer que dans tout voisinage de* P *il existe des points du fluide où* $V > 1$.

De cette remarque découle la conclusion suivante : étant donné un point P d'une ligne de jet, correspondant au point $\zeta = r$ $(-1 < r < +1)$, du diamètre de $\mathcal{C}$, pour qu'il existe un voisinage de P où $V < 1$, il est nécessaire que la fonction de profil vérifie la condition

$$(1) \qquad \int_0^{\pi} \frac{\cos\sigma - 2r + r^2\cos\sigma}{(1 - 2r\cos\sigma + r^2)^2}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma < 0.$$

En faisant $r = 0$, ce qui donne pour P le point à l'infini des lignes de jet, on retrouve précisément la condition de la Note précédente. Il est clair qu'en supposant même l'inégalité (1) vérifiée pour toutes les valeurs de r comprises entre -1 et $+1$ (ce qui entraîne la concavité des deux lignes de jet en tous leurs points) on obtient un ensemble de conditions nécessaires, mais non suffisantes, pour que dans tout le fluide $V < 1$; car même s'il y avait des points du fluide où $V > 1$, il suffirait que les lignes de jet soient bordées chacune d'une bande d'épaisseur arbitrairement petite où $V < 1$, pour que l'inégalité (1) soit vérifiée dans tout l'intervalle $-1 < r < +1$.

---

(1) Si l'arc ab est analytique et si la fonction reste régulière sur ab, le théorème est évident; dans les conditions plus larges du texte, on trouvera une démonstration simple dans G. Polya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2, p. 22, exerc. 129.

Mais, ainsi que l'a indiqué M. H. Villat (*Aperçus théoriques...*, p. 42), on obtient les conditions à la fois *nécessaires et suffisantes*, en adjoignant à la condition qui concerne les lignes de jet [inégalité (1) précédente] une condition concernant la valeur de $R(i\Omega)$ sur les parois solides, c'est-à-dire pour $\zeta = e^{i\sigma}$ $(0 < \sigma < \pi)$.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur le flambement des arcs encastrés à fibre moyenne parabolique très surbaissée.* Note de M. **E. Baticle**, présentée par M. Mesnager.

Considérons un arc encastré, dont la fibre neutre soit une courbe funiculaire des charges. Le moment fléchissant, dont l'expression générale est $\mu - Ax - Hy - B$, μ étant le moment de la poutre isostatique de même portée, H la poussée horizontale et A, B des constantes, est nul.

Supposons que l'arc subisse une petite déformation, y devenant $y + \eta$. Le moment fléchissant aura pour expression

$$M = \mu - (A + a)x - (H + h)(y + \eta) - (B + b),$$

qui, en négligeant $h\eta$, se réduit à

$$M = -ax - hy - b - H\eta.$$

D'où, en posant $K = EI$, l'équation différentielle

$$K\eta'' = -ax - hy - b - H\eta.$$

Admettons qu'il s'agit d'un arc très surbaissé, soumis à des charges uniformément réparties. On pourra prendre $y = \gamma x^2$, et l'on a la solution générale

$$\eta = -\frac{h}{H}\gamma x^2 - \frac{a}{H}x + 2\frac{h}{H}\frac{\gamma K}{H} - \frac{b}{H} + \alpha \cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,x + \beta \sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,x.$$

On a, d'autre part, les conditions $\eta_0 = \eta_1 = \eta'_0 = \eta'_1 = 0$, qui expriment la fixité et l'encastrement des retombées, ainsi que les équations générales des arcs encastrés très surbaissés

$$\int M\,dx = 0, \qquad \int Mx\,dx = 0, \qquad \int My\,dx = 0.$$

En remplaçant M par $K\eta''$ et en intégrant par parties, on trouve, compte tenu des valeurs de η et η', aux extrémités

$$\int y''\eta\,dx = 0.$$

ou, y'' étant constant,

$$\int \eta \, dx = 0.$$

On a ainsi cinq équations du premier degré en a, b, h, α, β, qui, en appelant $2d$ l'ouverture de l'arc, s'écrivent

$$-\frac{h}{H}\gamma d^2 + \frac{a}{H}d + \frac{h}{H}\frac{2\gamma K}{H} - \frac{b}{H} + \alpha\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d - \beta\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d = 0.$$

$$-\frac{h}{H}\gamma d^2 - \frac{a}{H}d + \frac{h}{H}\frac{2\gamma K}{H} - \frac{b}{H} + \alpha\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d + \beta\sin\sqrt{\frac{K}{H}}\,d = 0,$$

$$\frac{h}{H}2\gamma d - \frac{a}{H} + \alpha\sqrt{\frac{H}{K}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d + \beta\sqrt{\frac{H}{K}}\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d = 0,$$

$$-\frac{h}{H}2\gamma d - \frac{a}{H} - \alpha\sqrt{\frac{H}{K}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d + \beta\sqrt{\frac{H}{K}}\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d = 0,$$

$$-\frac{h}{H}\frac{\gamma d^3}{3} + \frac{h}{H}\frac{2\gamma K}{H}d - \frac{b}{H}d + \alpha\sqrt{\frac{K}{H}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d = 0.$$

Il y aura flambement, au sens d'Euler, si ce système de cinq équations linéaires et homogènes admet un système de solutions non toutes nulles. Pour cela, il faut et il suffit que le déterminant des coefficients des inconnues soit nul :

$$\begin{vmatrix}
-\gamma d^2 + 2\frac{\gamma K}{H} & d & -1 & \cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & -\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d \\
\gamma d^2 - 2\frac{\gamma K}{H} & -d & -1 & \cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & +\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d \\
2\gamma d & -1 & 0 & \sqrt{\frac{H}{K}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & \sqrt{\frac{H}{K}}\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d \\
-2\gamma d & -1 & 0 & -\sqrt{\frac{K}{H}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & \sqrt{\frac{H}{K}}\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d \\
\gamma\frac{d^3}{3} + 2\gamma\frac{Kd}{H} & 0 & -d & +\sqrt{\frac{K}{H}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Des combinaisons linéaires très simples des lignes de ce déterminant permettent de le ramener au suivant :

$$\begin{vmatrix}
\frac{2}{3}\gamma d^3 & -d\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d + \sqrt{\frac{K}{H}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & 0 \\
0 & 0 & \sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d - d\sqrt{\frac{H}{K}}\cos\sqrt{\frac{H}{K}}\,d \\
2\gamma d & -\sqrt{\frac{H}{K}}\sin\sqrt{\frac{H}{K}}\,d & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi deux solutions

1° $$\sin\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d - d\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}\cos\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d = 0;$$

2° $$-\frac{d^3}{3}\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}\sin\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d - d\cos\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d + \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}}\sin\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d = 0.$$

Posant $\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}d = \varphi$, et résolvant par rapport à $\operatorname{tang}\varphi$, ces deux solutions équivalent à

1° $$\operatorname{tang}\varphi = \varphi;$$

2° $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi^2}{3}}.$$

La première équation a une racine voisine de $\frac{3}{2}\pi$, soit $1,43\pi$; la seconde, de 2π. C'est la plus petite de ces deux valeurs de φ qui donne la condition de flambement. Elle s'écrit, en appelant l l'ouverture de l'arc,

$$\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}}\,\frac{l}{2} = 1,43\pi \qquad \text{ou, sensiblement,} \qquad \mathrm{H} = 8\pi^2\frac{\mathrm{EI}}{l^2}.$$

Nous concluons de cette formule, en la comparant à la formule d'Euler pour les poutres encastrées, que, *pour un arc encastré, l'effort normal critique est le double de celui de la poutre encastrée de même portée.*

Observations de M. **Mesnager** *au sujet de la Note de M.* Baticle.

La Note de M. Baticle donne pour les arcs très surbaissés dont l'axe est confondu avec le funiculaire des charges une démonstration simple, par une méthode analogue à celle qu'on emploie ordinairement pour l'étude du flambement des pièces rectilignes.

Son étude est présentée pour le cas de la charge uniforme suivant la corde (la courbe est alors une parabole) et dans le cas de l'encastrement des extrémités; mais il a déterminé également la solution dans le cas où les extrémités sont articulées. Ses formules sont dans le cas des arcs articulés aux deux extrémités

$$\mathrm{H}_1 = 4\frac{\mathrm{EI}\pi^2}{l^2}$$

et dans le cas des arcs encastrés aux deux extrémités

$$H_2 = 8\frac{EI\pi^2}{l^2};$$

H étant la poussée et l la longueur de l'arc. Il est à remarquer que ces formules sont celles qui correspondent au flambement de la même pièce droite assujettie à passer par un point fixe situé au milieu de la portée. Il est intéressant de généraliser ces résultats.

Pour qu'un arc soit à la limite de flambement, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une seconde forme d'équilibre infiniment voisine, passant par les mêmes extrémités, sans rien changer aux forces extérieures.

Étant donnée une voûte soumise sur son extrados à une pression uniforme, la courbe funiculaire est une circonférence. On sait que si l'on donne des déplacements w très petits le long du rayon, comptés positifs vers le centre

$$(1) \qquad \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\frac{1}{r^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Pw}{EI},$$

P étant la force agissant suivant la circonférence.

D'autre part on sait que, lorsque les déplacements w sont tels que $\frac{\partial w}{\partial\theta}$ reste très petit, la variation de longueur de la courbe est $\int w\,d\theta$, donc la déformation de flambement doit satisfaire à

$$(2) \qquad \int_0^\alpha w\,d\theta = 0,$$

α étant l'angle au centre de l'arc. Pour que cela puisse avoir lieu il faut que partie des w soient positifs, partie négatifs, donc entre ses appuis la voûte doit recouper la circonférence primitive au moins en un point intermédiaire.

En intégrant l'équation (1) exactement comme celle de la pièce droite chargée debout articulée à ses extrémités, et tenant compte de (2), on trouve que la plus petite valeur de P satisfaisant aux conditions du problème est

$$(3) \qquad P = \frac{4EI\pi^2}{l^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right),$$

l étant la longueur développée de l'intrados, $\alpha r = l$. Le recoupement a lieu au sommet de l'arc.

Si la voûte est large et astreinte à conserver rectilignes les parallèles

à l'axe, on introduit le facteur $1 - \sigma^2$ comme dans les plaques :

$$(4) \qquad P = \frac{4EI\pi^2}{l^2(1-\sigma^2)}\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right).$$

Dans le cas de voûte encastrée à ses extrémités, en suivant des raisonnements identiques à ceux qui donnent la formule de la pièce encastrée à ses extrémités assujettie à passer par un point fixe intermédiaire, condition imposée par (2), on trouve les formules précédentes dans lesquelles $4EI\pi^2$ est remplacé par $8EI\pi^2$.

Ces formules sont d'accord avec celles de Maurice Levy (¹) et de Timochenko (²).

Contrairement donc à ce qui est généralement admis, la voûte articulée ou encastrée aux naissances, qu'elle soit ou non articulée au sommet, ne flambe que sous une réaction des appuis égale à $\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)$ de celle sous laquelle flamberait la pièce droite de même section et de longueur égale au développement de la courbe moyenne, assujettie à passer par un point fixe au milieu de sa longueur et maintenue à ses extrémités de la même façon que la voûte.

ASTRONOMIE. — *Sur la rotation de la galaxie*. Note (³) de M. **H. Mineur**, présentée par M. Deslandres.

1. Nous nous étions proposé de vérifier les beaux résultats obtenus par Oort (⁴) et par Plaskett (⁵) sur la rotation de la galaxie.

Ces astronomes, dans l'intention de vérifier la théorie de Lindblad, ont étudié les vitesses radiales des étoiles situées dans le plan galactique et sont parvenus à cette conclusion que la galaxie est animée d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire à son plan de symétrie et situé dans la direction de la constellation du Sagittaire. Les astres utilisés étaient pour la plupart des étoiles faibles.

Notre étude nous a conduit à un résultat différent; nous allons exposer dans leurs grandes lignes notre méthode et nos conclusions.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, 10, 1884, p. 5.

(²) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1913, III, p. 558.

(³) Séance du 7 janvier 1929.

(⁴) Oort, *Bulletin of the astronomical Institutes of the Netherlands*, nᵒ 132, p. 79 à 89, et nᵒ 133, p. 91 à 94.

(⁵) Plasquett, *Monthly Notices of the royal Society*, t. 88, Mars 1928, p. 395.

2. Nous avons d'abord calculé théoriquement l'effet de la rotation galactique sur les vitesses radiales. Supposons que la galaxie tourne autour d'un axe et que la vitesse angulaire d'une étoile soit fonction de sa distance ρ à l'axe et de sa cote ζ au-dessus d'un plan perpendiculaire à cet axe :

$$\Omega = C + A\rho + B\zeta + \ldots.$$

Désignons par V la vitesse radiale moyenne des étoiles situées dans la direction de cosinus α, β, γ. V est fonction de α, β, γ; développons cette fonction en série suivant les puissances de ces variables :

$$V = K + \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + r\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots,$$

r désigne la distance moyenne des étoiles. Les termes du premier degré φ_1 traduisent le mouvement du Soleil, les termes du second degré φ_2 traduisent la rotation galactique, cette forme φ_2 a pour expression

$$\varphi_2 = \psi_1 \cdot \psi_2,$$

ψ_1 et ψ_2 étant deux formes linéaires. Le plan $\psi_1 = 0$ passe par le Soleil et l'axe de rotation, le plan $\psi_2 = 0$ est perpendiculaire au premier.

3. Nous avons utilisé 2149 vitesses radiales extraites du catalogue de l'Observatoire Lick, nous avons divisé le ciel en 96 régions pour chacune desquelles nous avons formé V et r. Par la méthode des moindres carrés nous en avons déduit :

$$100\,\varphi_2(x, y, z) = +0{,}1583\,x^2 - 1{,}2150\,y^2 + 1{,}4365\,z^2 + 0{,}7546\,yz$$
$$-3{,}2616\,zx \quad 3{,}8818\,xy$$

(coordonnées équatoriales).

Si cette forme se décompose comme nous le prévoyons au paragraphe 2, son équation en S doit avoir une racine nulle et deux racines opposées; or ces racines sont :

$$S_1 = +0{,}0109, \qquad S_2 = +3{,}0684, \qquad S_3 = -2{,}6995.$$

Cette vérification nous semble satisfaisante.

4. Nous avons déterminé les directions principales de φ_2, et nous avons ainsi été conduits à considérer les axes :

	Ox'.	Oy'.	Oz'.
Longitude galactique........	231°47′	324°23′	322°36′
Latitude galactique.........	+0°27′	+80°1′	−11°12′

φ_2 a pour expression, par rapport à ces axes,

$$100\varphi_2 = +0{,}0111x'^2 + 0{,}1851y'^2 + 0{,}1818z'^2 - 5{,}7606y'z' - 0{,}0206z'x' - 0{,}0125x'y'.$$

On peut donc supposer que

$$100\varphi_2 = -5{,}8y'z'.$$

5. Ces résultats peuvent s'interpréter de diverses manières. L'une de ces interprétations est la suivante :

L'ensemble des étoiles visibles à l'œil nu est animé d'une rotation autour d'un axe situé dans une direction voisine de Ox', c'est-à-dire dans la constellation de la Carène. Or c'est précisément dans cette direction qu'on place d'ordinaire le centre de l'amas local dont le Soleil fait partie.

Ce résultat est différent de celui de Oort et de Plaskett, sans que pour cela la conciliation entre ces deux résultats soit impossible. En effet Oort et Plaskett ont étudié des astres très éloignés du Soleil et n'appartenant pas à l'amas local, la rotation qu'ils ont mise en évidence est donc celle de la galaxie. Sans doute avons-nous mis en évidence la rotation de l'amas local.

6. Prenons comme unités le km/sec. et le parsec, et appelons r_0 la distance du Soleil à l'axe de rotation, on a

$$Ar_0 = -0{,}011, \qquad Br_0 = 0{,}055.$$

GÉODÉSIE. — *Sur l'ellipticité de l'équateur terrestre.* Note de M. **Mario Bossolasco**, présentée par M. G. Perrier.

J'ai énoncé [1] sans démonstration, le résultat suivant : *l'ellipse équatoriale déduite des mesures gravimétriques doit être allongée, non dans la direction du méridien de Greenwich, mais dans la direction exactement normale*, sans altération de forme. Je reviens sur le même sujet pour justifier l'exactitude de mon affirmation qui vient d'être mise en doute par M. T. Banachiewicz [2]: celui-ci s'appuie sur des considérations bien connues [3], mais

---

[1] *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 814.

[2] *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 46.

[3] Cf. par exemple F.-R. Helmert, *Höhere Geodäsie*, Leipzig, Teubner, 2, 1884, p. 245.

qui ne sont pas applicables au problème de l'ellipticité de l'équateur, en raison d'une hypothèse simplificatrice qu'on n'a pas le droit d'introduire.

Le développement en série de fonctions sphériques (polynomes de Legendre P_n) du potentiel de la pesanteur W en un point $P'(r', \varphi', \lambda')$, extérieur au géoïde, a pour point de départ la formule suivante, *valable seulement pour* $r' > r$:

$$(1) \qquad \frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ P_0 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \ldots \right\},$$

où e représente la distance entre P' et un point quelconque P intérieur à la masse du géoïde, placé à la distance r de l'origine O (centre de la Terre). De la condition limitative $r' > r$, on déduit que les expressions théoriques généralement usitées pour le potentiel W et la gravité g à la surface du géoïde ne représentent effectivement ces valeurs qu'aux points les plus éloignés du centre, c'est-à-dire aux extrémités du plus grand axe a. Lorsque la position de P' sur le géoïde est quelconque il faut donc utiliser une autre représentation analytique de W et de g; en désignant par I et E respectivement les deux parties du géoïde découpées par la sphère de rayon $OP' = r'$ et de centre O, on voit que l'on doit poser :

$$(2) \quad W(P') = \frac{f}{r'} \left[\int_I dm + \frac{1}{r'} \int_I P_1 r\, dm + \frac{1}{r'^2} \int_I P_2 r^2\, dm + \ldots \right] + f \left[\int_E \frac{dm}{r} + r' \int_E \frac{P_1\, dm}{r^2} + r'^2 \int_E \frac{P_2\, dm}{r^3} + \ldots \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'.$$

Cette relation peut par exemple être utilisée pour obtenir la loi exacte des variations de la pesanteur le long de l'équateur terrestre supposé elliptique; en particulier, si l'on désigne par g_b l'intensité de la pesanteur aux extrémités du petit axe, de longueur $2b$ ($\lambda = 90°$), de l'ellipse équatoriale, la relation (2) conduit à une valeur de g_b dont le terme principal dépendant de la longitude est *positif*, tandis que le terme analogue contenu dans l'expression inexacte de g_b, généralement employée, est *négatif*.

Avant de comparer les valeurs de g_a et g_b, on doit égaler l'expression du potentiel W_a en un point situé à une extrémité du plus grand axe avec celle W_b en un point situé à l'extrémité du petit, ce qui exprime que le géoïde est une surface de niveau. Au moyen de l'égalité obtenue, on peut transformer l'expression de g_b, qui, réduite aux termes principaux, devient

$$(3) \qquad g_b = \frac{3 M_i f}{b^2} + \frac{2f}{b} \int_E \frac{dm}{r} - \frac{2Mf}{ab} - \frac{3}{2} \frac{f}{a^3 b} (B - A) + \ldots.$$

où M désigne la masse totale du géoïde, M_i celle de la partie I, A et B les moments principaux équatoriaux d'inertie ($A < B$). En prenant pour g_a l'expression connue, de la relation (3) on déduit $g_b > g_a$, a étant plus grand que b.

Je terminerai en rappelant que les valeurs g_a, g_b, g_c de l'intensité de la pesanteur aux extrémités des trois axes du géoïde assimilé à un ellipsoïde sont liées par la relation *exacte* suivante, due à Pizzetti ([1]) :

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} + \frac{g_c}{c} = 4\pi f k - 2\omega^2.$$

En prenant $k = 5{,}513$ comme valeur le plus probable de la densité moyenne k de la Terre ([2]), $g_c = 983{,}232$, $c = 6356912^{\text{m}}$, on obtient

$$\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b} = 30670 . 10^{10}.$$

Avec les valeurs de g_a, g_b, a, b, tirées des formules empiriques donnant la gravité normale, on peut alors vérifier que, dans l'hypothèse $a > b$, l'inégalité $g_b > g_a$ conduit à une valeur numérique de $\frac{g_a}{a} + \frac{g_b}{b}$ plus voisine de celle ci-dessus que de celle obtenue si l'on avait $g_b < g_a$.

PHYSIQUE. — *Enregistrement photographique d'une vitesse angulaire. Application aux mesures balistiques.* Note ([3]) de M. **A. Guillet**, présentée par M. A. Cotton.

Dans les appareils destinés aux mesures balistiques la donnée expérimentale immédiate est toujours l'angle Θ dont tourne l'organe mobile, percuté au repos dans sa position d'équilibre.

Je me propose d'indiquer ici une technique différente, que j'ai appliquée autrefois au galvanomètre à cadre mobile dans le but d'en faire un compteur d'énergie électrique ([4]). Le cadre fut successivement suspendu : à un fil de torsion, à un fil sans torsion, c'est-à-dire libéré de toute action directrice comme on le fait aujourd'hui dans le fluxmètre, puis enfin sous-

---

([1]) *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, p. 73, Pisa, 1913.

([2]) Cf. J. Zenneck, *Gravitation* (*Encycl. Mathém.*, 5, 1903, p. 41).

([3]) Séance du 7 janvier 1929.

([4]) *Comptes rendus*, 130, 1900, p. 1549.

trait à l'amortissement électromagnétique ; d'où six cas possibles au point de vue mécanique. Il est à remarquer que dans tous ces cas la vitesse angulaire initiale ω_0 de l'équipage percuté est la même : en effet le cadre étant d'abord immobile, ni l'action directrice, ni l'amortissement ne peuvent alors intervenir. La vitesse angulaire ω_0 dépend donc seulement des conditions qui définissent la percussion, alors que l'angle d'impulsion Θ dépend à la fois de ces conditions et de celles qui règlent le mouvement ultérieur du cadre.

Les équations électromécaniques, bien connues, à résoudre, sont :

$$(1) \qquad \mathcal{J}\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = S\varphi i; \qquad Ri = e - \frac{L\,di}{dt} - S\varphi\frac{d\theta}{dt}.$$

On en tire

$$\omega_0 = \frac{S\varphi}{R\mathcal{J}}\int e\,dt.$$

Le calcul de l'intégrale $\int e\,dt$, et par suite la mesure des diverses grandeurs électriques, de mêmes dimensions, qu'elle peut représenter, est donc ramené à la mesure d'une vitesse angulaire ω_0.

Pour enregistrer photographiquement cette vitesse, un film circulaire a été substitué à la règle transparente Carpentier dans le dispositif qui sert habituellement au relevé de l'angle Θ ; d'autre part, la lumière de la source employée, au lieu d'éclairer d'une manière permanente la fenêtre O placée dans le plan du centre du miroir de rayon R, dont l'image O′ se forme sur le film, l'éclaire périodiquement à la fréquence N et pendant des instants très courts. Ces conditions sont aisément réalisées par l'emploi d'un diapason de fréquence N : 2 dont les branches portent chacune un disque percé au centre d'un très petit trou. Ces disques ont leurs plans parallèles et voisins ; les trous fortement éclairés (arc, pointolite, etc.) sont en regard lorsque le diapason est au repos. Si, lorsque le diapason vibre l'équipage est en mouvement, on obtiendra au développement du film une succession de points dont les distances s mesurent les déplacements du spot pendant des durées égales à N^{-1} et par suite les vitesses angulaires correspondantes de l'équipage : $\omega = \frac{sN}{2R}$.

Comme le porte-film peut être déplacé micrométriquement à l'intérieur de la boîte fermée qui le contient, il est facile de faire servir un même film à un grand nombre de mesures de ω (diapason en mouvement), ou de Θ (diapason au repos).

Pour réaliser rapidement au laboratoire le cas $C = O$, au lieu de monter le cadre sur pivot on le suspend à un fil de cocon et l'on immerge les extrémités de son circuit, ramenées suivant l'axe du cadre, dans le mercure que contiennent deux larges godets disposés sur le prolongement du fil de suspension. Une fourchette permet d'amener le cadre toujours dans une même position, c'est-à-dire le spot en un même point. Si on laisse subsister l'amortissement les équations à vérifier sont, f étant le coefficient du terme amortissant,

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{f}{\mathcal{J}}t} \qquad \text{et} \qquad \Theta = \frac{\mathcal{J}}{f}\omega_0\left(1 - e^{-\frac{f}{\mathcal{J}}t}\right),$$

d'où l'azimut limite

$$\Theta_l = \frac{\mathcal{J}}{f} \cdot \omega_0.$$

L'intégration de l'équation (1), entre les deux positions de repos du cadre, conduit à cette même formule, mais l'instantanéité d'évolution de l'action motrice n'est plus alors nécessaire [1]. Pour supprimer l'amortissement il faut, à l'aide d'organes faciles à imaginer, ouvrir automatiquement le circuit avant tout déplacement sensible du cadre, ou supprimer à temps le champ impulsant φ. La rotation est alors uniforme.

Les photographies doivent être examinées en correspondance avec les lois d'évolution propres à chaque cas, et qu'il est facile d'expliciter. Les expériences de contrôle ont été réalisées plus spécialement avec l'équipage non dirigé et sans amortissement.

Il est évident que cette sorte de « règle photobalistique » permet de constater les variations de vitesse d'un rotor quelconque et d'en mesurer les causes.

ÉLECTRONIQUE. — *La théorie électronique des métaux, d'après Sommerfeld, et le libre parcours moyen des électrons.* Note de M. L. **Brillouin**, présentée par M. M. Brillouin.

Sommerfeld a obtenu des résultats remarquables, en poursuivant l'application de la statistique de Fermi aux électrons libres dans les métaux [2]. Pour compléter cette théorie, il fallait calculer le libre parcours moyen des

(1) A. Cotton, *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 21, 1927, p. 157.

(2) Sommerfeld, *Zts. f. Phys.*, 47, 1928, p. 1.

électrons, c'est ce qu'ont fait Houston, Frenkel et Mirolubow ([1]). Ces auteurs s'appuient sur la mécanique ondulatoire, et remplacent un faisceau d'électrons par une onde plane ψ; puis ils étudient la diffusion de cette onde par suite de l'agitation thermique des atomes du métal. Les méthodes sont calquées sur celles qui permettent d'évaluer la diffusion de la lumière ou des rayons X dans un cristal.

Il suffit de noter cette similitude des deux calculs pour apercevoir aussitôt leur point faible. Les résultats ne peuvent être semblables pour la lumière, qui obéit à la statistique de Bose-Einstein, et pour les électrons qui suivent la statistique de Fermi et sont soumis au principe de Pauli.

Considérons une onde (lumière ou onde de de Broglie), de direction D et fréquence ν connues, et cherchons l'intensité de l'onde diffusée dane une direction D′, avec une fréquence ν' (qui peut être égale à ν ou en différer). Les calculs précédents donnent un résultat correct, aussi longtemps qu'il n'existe aucune autre onde semblable traversant simultanément les corps diffuseurs. Mais s'il y a, préalablement à la diffusion, une autre onde de fréquence ν', se propageant justement dans la direction D′, l'intensité de l'onde diffusée est modifiée. Dans le cas de la lumière, l'intensité de l'onde diffusée est multipliée ([2]) par

$$1+\frac{B}{A}\rho' = 1+\frac{C^3}{8\pi h\nu'^3}\rho' = 1+n', \tag{1}$$

où A et B sont les coefficients d'Einstein; ρ' la densité d'énergie de l'onde préexistante D′, ν'; et n' représente le nombre de photons par case d'extension en phase, correspondant à ρ', D′, ν'.

Si l'onde est une onde cathodique ψ, guidant des électrons soumis au principe de Pauli ([3]), l'intensité de l'onde diffusée sera multipliée par $1-n'$. Si l'onde préexistante ρ', D′, ν' a une intensité assez grande pour correspondre à $n'=1$, la diffusion sera impossible; en effet, $n'=1$ correspond à la présence d'un électron par cellule d'extension en phase, dans la direction D′, avant la diffusion; le principe de Pauli interdit alors à la diffusion d'ajouter des électrons dans ces cellules déjà complètes.

Cette correction modifie profondément les résultats. Soit $l_0(\varepsilon)$ le libre

([1]) HOUSTON, *Zts. f. Phys.*, 48, 1928, p. 449. — FRENKEL, *Ibid.*, 47, 1928, p. 819. — FRENKEL et MIROLUBOW, *Ibid.*, 49, 1928, p. 885.

([2]) A. EINSTEIN, *Phys. Zeits.*, 18, 1917, p. 21.

([3]) L. BRILLOUIN, *Ann. de Phys.*, 7, 1927, p. 315. — W. BOTHE, *Zts. f. Phys.*, 46, 1928, p. 327.

parcours moyen des électrons d'énergie ε, tel qu'il résulterait des calculs de Houston ou Frenkel; le libre parcours réel sera

$$(2) \qquad l = \frac{l_0}{1 - n'} = l_0 \frac{e^{\alpha+u} + 1}{e^{\alpha+u}},$$

car on a, dans le métal, d'après Fermi ou Sommerfeld,

$$(3) \qquad n' = \frac{1}{e^{\alpha+u} + 1}, \qquad u = \frac{\varepsilon}{k\mathrm{T}}.$$

Pour obtenir les conductibilités électriques ou calorifiques, il faut, d'après Sommerfeld, calculer diverses intégrales du type suivant :

$$(4) \qquad \mathrm{V}_{k-1} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u}(u^k l) \frac{du}{e^{\alpha+u} + 1}.$$

La méthode de calcul de Sommerfeld n'est valable que si l varie lentement au voisinage du point $u = -\alpha$; la fonction l_0 remplit bien cette condition mais notre $l(2)$ n'y satisfait pas. Une intégration par parties nous donnera

$$(5) \qquad \mathrm{V}_{k-1} = \int_0^\infty u^k l'_0 \frac{du}{e^{\alpha+u} + 1} \approx \int_0^{-\alpha} u^k l'_0 \, du + \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\partial}{\partial u} u^k l^0\right)_{u=-\alpha} \cdots$$

en utilisant sur (5) une méthode approchée semblable à celle de Sommerfeld.

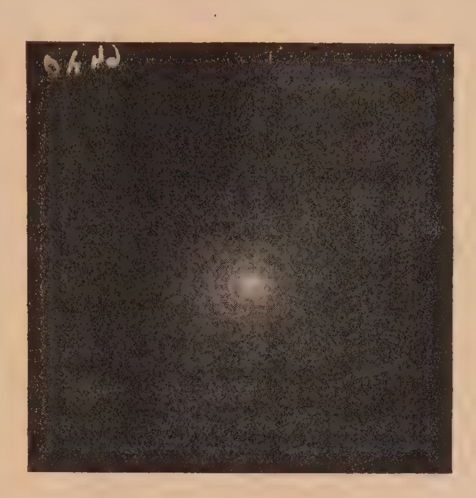
Malheureusement ces formules détruisent la démonstration de la loi de Wiedemann-Franz.

PHYSIQUE. — *La diffraction des électrons par des poudres cristallines. Analyse électronique.* Note de M. **M. Ponte**, présentée par M. Ch. Fabry.

J'ai observé que les électrons peuvent donner des phénomènes de diffraction avec des poudres cristallines, en utilisant un montage analogue au montage classique de l'étude des poudres par les rayons X. Les expériences ont été réalisées avec de l'oxyde de zinc. Un faisceau cathodique étroit, issu d'une cathode chaude, tombe sur un fil métallique mince recouvert d'une faible couche d'oxyde de zinc ou sur le bord d'un diaphragme sur lequel a été formé l'oxyde; il peut également traverser un « tissu » d'oxyde de zinc, formé sans support. J'ai obtenu ainsi, pour des tensions de 7, 6; 11, 17; 13, 92 et 17, 25 kilovolts de beaux anneaux de diffraction cristal-

line, dont les figures donnent des exemples; pour 17,25 kilovolts, le cliché original révèle une vingtaine d'anneaux.





Tissu d'oxyde de zinc.
V = 13,92 kilovolts — V = 17,25 kilovolts.
Distance plaque-tissu : 80mm.

Le système des distances réticulaires de l'oxyde de zinc peut se calculer à partir de sa structure (système hexagonal : groupe C_{6v}^{4}; $a = 3,25$; $c = 5,25$ angströms (¹). Les distances réticulaires qui correspondent aux anneaux observés, calculées à partir de la loi de Bragg et de la loi de Louis de Broglie $\lambda = \frac{h}{mv}$, ne s'écartent pas des premières de plus de 1 pour 100 pour les anneaux que l'on peut pointer avec précision et de plus de 2 pour 100 pour ceux qui sont moins intenses. La loi de Louis de Broglie est donc vérifiée à cette précision, sans indice, de $\lambda = 140,6$ à $93,4$ u. X. Certaines questions d'intensité restent à élucider.

Le tableau suivant donne quelques-uns des résultats fournis par des anneaux pointés à 0,40 pour 100 environ :

Distance réticulaire observée.	V = 13,92 kilovolts, λ = 103,8 u. X.	—	1,918	1,604	1,487	1,387
Id.	V = 17,25 kilovolts, λ = 93,4 u. X.	2,816	1,918	1,627	1,480	1,380
Distances réticulaires de l'oxyde de zinc.	....	2,815	1,916	1,62	1,482	1,380
	....	$(10\bar{1}0)$	$(10\bar{1}2)$	$(11\bar{2}0)$	$(10\bar{1}3)$	$(11\bar{2}2)$

(¹) *International critical Tables*, 1, 1re édition, 1926, p. 342.

Les expériences précédentes montrent la possibilité de l'étude du réseau cristallin d'une substance par les électrons, tout comme par les rayons X, sans qu'il soit besoin d'une technique délicate comme celle de la préparation des lames minces de Thomson (¹) et Rupp (²).

L'analyse électronique présente l'avantage de donner en peu de temps (1 heure à 1 heure et demie dans les expériences précédentes), avec une dépense d'énergie très faible (35 watts dans le tube pour $V = 17$ kilovolts), tout le diagramme cristallin de la substance sur une plaque de faibles dimensions, la précision du dépouillement pouvant se faire à 2 pour 100 dans un cas analogue au présent.

Les expériences peuvent réussir avec une quantité très faible d'oxyde de zinc : l'analyse électronique doit être un procédé fécond d'étude des phénomènes superficiels. Dans cet ordre d'idées, en faisant diffracter des électrons de 9 kilovolts environ par des lames d'or très minces (constellées de trous), nous avons observé trois anneaux très faibles dus aux plans 111, 100, 110 de l'or et, plus près du centre, un anneau intense dont la distance réticulaire, mesurée pour diverses tensions, était 4,20 angströms en moyenne. Or la graisse des rodages analysée aux rayons X ($K\alpha$ du cuivre) révèle une forte raie pour 4,24 angströms, due à la paraffine. Il ne semble pas douteux que les électrons aient mis ainsi en évidence un film très mince de paraffine qui s'est déposé dans le vide sur la feuille d'or et qu'il eût probablement été difficile de déceler autrement.

La méthode décrite dans cette Note doit pouvoir s'appliquer également aux ions positifs et montrer si ceux-ci sont également accompagnés d'une onde associée.

OPTIQUE. — *Biréfringence et dichroïsme des couches minces de fer obtenues par distillation.* Note de M. **Marcel Cau**, présentée par M. A. Cotton.

J'ai signalé précédemment que les couches de fer obtenues par distillation d'un fil de fer chauffé électriquement sont biréfringentes et dichroïques (³). J'ai indiqué l'expérience qui permet de constater clairement ces effets : si un faisceau de lumière monochromatique rectilignement polarisée tombe

(¹) G. P. Thomson, *Proceedings of the Royal Society*, A.117, 1928, p. 602.

(²) E. Rupp, *Annalen der Physik*, 85, 1928, p. 981.

(³) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1293, et 188, 1929, p. 57.

normalement sur une telle lame, la vibration transmise possède, en général, une ellipticité E et a tourné d'un angle R par rapport à la vibration incidente. R et E sont nuls lorsque l'*axe* de la lame (défini dans la première Note) est parallèle ou perpendiculaire à la direction de la vibration incidente, la région utilisée étant dans la zone axiale : cela montre que les directions principales de la biréfringence et du dichroïsme coïncident. L'expérience montre que les variations de R et de E en fonction de l'azimut A de l'axe de la lame par rapport à la direction de la vibration incidente sont bien représentées par des sinusoïdes concordantes : ce n'est qu'une *première approximation* valable dans les limites de précision des mesures quand les effets sont assez petits.

Je me propose d'indiquer les formules *exactes* représentant l'effet sur une vibration rectiligne d'une biréfringence et d'un dichroïsme rectilignes simultanés et de mêmes directions principales, d'en déduire les formules de deuxième approximation et de montrer que les mesures sont bien d'accord avec ces formules.

Formules exactes. — Soient δ le retard relatif subi par la composante de vibration parallèle à l'axe, k le rapport du facteur de transmission de cette composante à celui de la composante normale. Analytiquement ou mieux en utilisant la représentation sphérique de Poincaré, on établit les formules rigoureuses

$$\sin 2\mathrm{E} = \frac{2k \operatorname{tang} \mathrm{A}}{k^2 + \operatorname{tang}^2 \mathrm{A}} \sin \delta; \tag{1}$$

$$\operatorname{tang} 2(\mathrm{A} - \mathrm{R}) = \frac{2k \operatorname{tang} \mathrm{A}}{k^2 - \operatorname{tang}^2 \mathrm{A}} \cos \delta. \tag{2}$$

Leur forme se simplifie et révèle mieux la période de l'effet complexe en fonction de A si l'on pose $k = \frac{1+h}{1-h}$; on obtient :

$$\sin 2\mathrm{E} = \frac{(1-h^2) \sin \delta \sin 2\mathrm{A}}{1 + h^2 + 2h \cos 2\mathrm{A}}; \tag{3}$$

$$\operatorname{tang} 2(\mathrm{A} - \mathrm{R}) = \frac{(1-h^2) \cos \delta \sin 2\mathrm{A}}{(1+h^2) \cos 2\mathrm{A} + 2h}; \tag{4}$$

d'où l'on tire aisément l'expression complète de tang 2R.

Formules approchées. — 1° Si les effets sont très petits, on peut traiter h, δ et par suite R et E comme des infiniment petits de même ordre; en conservant seulement les termes principaux des formules (3) et (4) on

obtient :

$$R = h \sin 2A; \tag{5}$$

$$E = \frac{1}{2} \delta \sin 2A. \tag{6}$$

2° Si les mesures sont assez précises et les effets assez importants, il faudra conserver les *termes du second ordre*, qui ne seront plus négligeables et l'on obtiendra :

$$R = h \sin 2A - \frac{1}{2}\left(h^2 - \frac{\delta^2}{4}\right) \sin 4A; \tag{7}$$

$$E = \frac{\delta}{2} \sin 2A - \frac{\delta}{2} h \sin 4A. \tag{8}$$

Les courbes représentant les variations de R et de E en fonction de A ne sont plus sinusoïdales : il faut ajouter aux seconds membres des formules (5) et (6) des termes correctifs de fréquence double.

Vérification expérimentale. — J'ai préparé une couche présentant des effets importants en produisant le dépôt sur une lamelle placée très près du fil générateur; la zone utilisable sensiblement uniforme était très étroite. Le tableau suivant contient, pour des azimuts A répartis de 15 en 15° sur un demi-tour, les valeurs observées de R et de E, les valeurs R_c et E_c calculées par les formules de première approximation, les écarts ΔR et ΔE entre les deux séries, et les termes correctifs de deuxième approximation ΔR_c et ΔE_c.

Lame J 18. — Épaisseur, $76^{m\mu}$; densité optique, 1,35 pour $\lambda = 546$.

Valeurs calculées avec $h = 0{,}02412$, $\frac{\delta}{2} = 49',25 = 0{,}01432$ radian.

A (°).	R_{obs} (').	E_{obs} (').	R_c (').	E_c (').	ΔR.	ΔE.	ΔR_c.	ΔE_c.
− 2,5	− 7,4	− 3,3	− 7,2	− 4,3	−0,2	+1,0	+0,11	+0,21
+12,5	+34,8	+19,4	$+35{,}0_5$	+20,8	$-0{,}2_5$	−1,4	−0,50	−0,91
27,5	67,5	38,3	67,9	$40{,}3_5$	−0,4	$-2{,}0_5$	−0,61	−1,12
42,5	83,2	48,6	82,6	$49{,}0_5$	+0,6	$-0{,}4_5$	−0,11	−0,21
57,5	75,7	46,3	75,1	$44{,}6_5$	+0,6	$+1{,}6_5$	+0,50	+0,91
72,5	48,0	29,9	$47{,}5_5$	$28{,}2_5$	$+0{,}4_5$	$+1{,}6_5$	+0,61	+1,12
87,5	+ 7,0	+ 4,6	+ 7,2	+ 4,3	−0,2	+0,3	+0,11	+0,21
102,5	−35,9	−21,6	$-35{,}0_5$	−20,8	$-0{,}8_5$	−0,8	−0,50	−0,91
117,5	−70,4	−42,5	−67,9	$-40{,}3_5$	−2,5	$-2{,}1_5$	−0,61	−1,12
132,5	−82,1	−49,5	−82,6	$-49{,}0_5$	+0,5	$-0{,}4_5$	−0,11	−0,21
147,5	−74,1	−43,3	−75,1	$-44{,}6_5$	+1,0	$+1{,}3_5$	+0,50	+0,91
162,5	−46,6	−26,2	$-47{,}5_5$	$-28{,}2_5$	$+0{,}9_5$	$+2{,}0_5$	+0,61	+1,12

Si l'on trace les diagrammes représentant les variations des écarts calculés et observés en fonction de A, on voit que l'introduction des termes correctifs théoriques est justifiée par l'expérience. Il subsiste cependant encore quelques différences, mais, à une exception près, elles ne dépassent pas 1' et peuvent être attribuées aux erreurs d'expériences.

OPTIQUE. — *Les radiations secondaires dans la lumière diffusée par le quartz.* Note de M. **Jean Cabannes**, présentée par M. Ch. Fabry.

Dans une Note récente sur la polarisation des radiations secondaires diffusées par les liquides ([1]), j'ai suggéré que l'action de la lumière sur une molécule devait dépendre de son orientation ([2]). J'ai été amené, pour vérifier cette hypothèse, à étudier les cristaux, où les molécules sont orientées suivant un petit nombre de directions fixes. Les expériences ont été faites sur le quartz.

1° *Les spectres de diffusion*, obtenus par Daure, *comprennent toujours les mêmes radiations, quelle que soit l'orientation du cristal.* Landsberg et Mandelstamm avaient déjà signalé ce fait ([3]). Voici, évaluées en nombre d'ondes par centimètre, les diminutions ou augmentations de fréquence, *indépendantes de la radiation excitatrice :*

$$n = \pm 129;\quad \pm 208;\quad \pm 267;\quad -357;\quad -403;\quad \pm 467,5;\quad -700;\quad -796;\quad -1062;\quad -1165;\quad -1287.$$

Si l'on introduit les fréquences fondamentales

$$\nu_1 = 117,6;\qquad \nu_2 = 129,0;\qquad \nu_3 = 67,35,$$

les n observés sont égaux à

$$\pm\nu_2;\quad \pm 3\nu_3;\quad \pm 4\nu_3;\quad -3\nu_1;\quad -6\nu_3;\quad \pm 4\nu_1;\quad -6\nu_1;\quad -12\nu_3;\quad -9\nu_1;\quad -9\nu_2;\quad -10\nu_2.$$

([1]) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 654. Je dois rectifier ici une erreur qui s'était glissée dans cette Note : la théorie électromagnétique de Maxwell-Lorentz ne donne une dépolarisation de 6/7 que si la radiation secondaire envisagée provient d'une *rotation* de la molécule; la dépolarisation des radiations dues aux *vibrations* intramoléculaires dépend de la structure de la molécule et peut varier d'une radiation à une autre.

([2]) Une hypothèse analogue avait déjà permis d'expliquer la polarisation de fluorescence. Cf. Francis Perrin, *Journal de Physique*, **7**, 1926, p. 390.

([3]) *Zeitschrift für Physik.*, **50**, 1928, p. 772.

les radiations les plus intenses sont

$$-467,5 \text{ (largeur } 1,5 \text{ Å)}, \qquad -208 \text{ (largeur } 4 \text{ Å)} \quad \text{et} \quad \pm 129.$$

2° Les mesures de polarisation m'ont donné des résultats inattendus. Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$ (Ox, rayon incident; Oy, rayon diffusé); soit une radiation secondaire n; soient I et i les intensités de cette radiation, dédoublée par un wollaston qui sépare la composante parallèle à Oz de la composante parallèle à Ox.

a. L'axe du cristal étant normal aux deux rayons incident et diffusé, les raies $\pm 467,5$ et les bandes ± 208 sont à peu près complètement polarisées suivant Oz ($\rho = \frac{i}{I} \leqq 0,05$), et *la raie* -267 *paraît complètement polarisée à* 90° *des premières* ($p = \infty$) (¹). Ce dernier résultat est nouveau (dans les liquides étudiés jusqu'ici j'ai toujours trouvé $p \leqq 1$); cependant il n'est pas tout à fait inexplicable : des vibrateurs linéaires doivent donner une vibration i supérieure à I s'ils sont sensiblement parallèles à Ox.

b. Mais, *si l'on amène l'axe du quartz à coïncider avec* Ox, on s'attend à trouver une permutation des intensités I et i : or *l'état de polarisation des raies secondaires que nous venons de citer ne change pas* (²). Il reste encore le même lorsqu'on fait tourner l'axe du cristal de 30°, dans le plan yOz, à partir de Oz (³).

D'après le principe de correspondance, l'effet de polarisation de la lumière émise dépend de la nature et de l'orientation du vibrateur qui l'émet. Or ce vibrateur, supposé linéaire, ne peut pas être à la fois parallèle et perpendiculaire à l'axe optique. Il faut donc, semble-t-il, qu'un certain nombre de vibrateurs se groupent en un système possédant la symétrie du cristal, pour émettre des vibrations concordantes dont la composante i ou I (suivant les cas) est détruite par interférences.

Le spectre de diffusion des cristaux ne serait donc pas émis par des sources incohérentes.

(¹) La raie -796 se comporte comme la raie -267.

(²) Cependant la raie -129 paraît se comporter de manière différente : elle serait complètement polarisée ($\rho = \infty$) dans le cas *a* et complètement dépolarisée ($\rho = 1$) dans le cas *b*. Malheureusement la raie diffusée sans changement de longueur d'onde est tellement intense qu'elle gêne l'étude de la raie voisine -129. La faible raie -1165 paraît se comporter comme la raie -129.

(³) Si l'on incline l'axe du cristal dans le plan xOz, la radiation $-467,5$ ne reste pas polarisée rectilignement suivant Oz. Mais ce changement *peut* être attribué à la biréfringence du quartz qui transformerait en vibration elliptique, pendant sa propagation le long de Oy, la vibration rectiligne initiale.

SPECTROSCOPIE. — *Sur le spectre d'absorption ultraviolet du peroxyde d'azote.* Note de M. **Maurice Lambrey**, présentée par M. Ch. Fabry.

Le spectre d'absorption du peroxyde d'azote a été souvent étudié et se trouve bien connu dans le domaine visible. Bien qu'attribuable à la seule molécule NO^2, il est d'une complexité extrême ainsi qu'en témoigne le travail récent de L. C. K. Carwile (1), qui en a mesuré les longueurs d'onde caractéristiques entre 6223 et 3978 Å. Il m'a semblé que l'étude du domaine ultraviolet pouvait présenter quelque intérêt. Un Mémoire très récent de L. Harris (2) sur le même sujet me conduit à publier les résultats sommaires d'un premier examen de ce spectre.

Le peroxyde d'azote liquide, même surfondu à — 20°, et sous une épaisseur de 1^{mm}, présente une absorption intense pour toutes les longueurs d'onde inférieures à 3975 Å. Quand la température s'élève, le spectre s'étend vers la région visible. Il semble donc qu'on ne puisse attribuer cette absorption à la seule molécule N^2O^4, à moins que son spectre ne varie rapidement en fonction de la température.

Le peroxyde d'azote gazeux présente deux spectres d'absorption, attribuables l'un à N^2O^4, l'autre à NO^2. Le premier se compose de deux bandes larges, sans structure apparente, l'une qui culmine vers 3400 Å, l'autre qui s'étend depuis 2400 Å jusqu'à la limite du spectre. Le second est un spectre de bandes possédant une structure complexe et qui s'étend, d'une part, depuis le jaune jusqu'à 2900 Å; d'autre part, de 2490 Å jusqu'à la limite du spectre. Le coefficient d'absorption n'est d'ailleurs nul pour aucune longueur d'onde. Il est minimum vers 3020 Å et, abstraction faite des maxima et minima successifs correspondant aux bandes, il croît ensuite régulièrement quand on s'avance vers les petites longueurs d'onde.

Les tableaux I et II donnent les longueurs d'onde des maxima apparents d'absorption attribuables à NO^2. La dispersion employée ne permet pas d'en déceler la structure fine, existante cependant, au moins pour certaines d'entre elles [par exemple, la bande 2495 Å (2)]. La précision est de l'ordre de 1 Å. Les notations TF, F, f, tf désignent respectivement les

(1) C. L. K. Carwile, *Astrophysical Journal*, 67, 1928, p. 184.

(2) L. Harris, *Proceedings of the national Academy of America*, 14, 1928, p. 690.

bandes dont l'intensité est forte, moyenne, faible ou très faible. Certaines bandes faibles et peu contrastées à l'œil se manifestent à l'enregistrement microphotométrique, non pas par des maxima d'absorption, mais par une série d'ondulations étagées sur la pente d'une courbe moyenne ascendante ou descendante.

Tableau I.

2495	F	2425	F	2367	f	2311	F	2240	?	2125,5	F
2462,5	f	2395	f	2356	F	2293,5	f	2212	F	2083	F
2451	f	2377	f	2327	f	2263	F	2166	F		

Tableau II.

4009	TF	3857	F	3738,5	F	3448	f	3112	tf
4000	TF	3854	tf	3726	f	3436	f	3094	tf
3983,5	TF	3847,5	TF	3720	TF	3411,5	F	3074	tf
3974	f	3845	tf	3693	f	3387,5	F	3050,5	tf
3959	TF	3840	F	3687	f	3364	F	3032	tf
3956	TF	3834	F	3677	f	3348	F	2996	tf
3940	F	3829	f	3674	F	3328	F	2974	tf
3924	f	3820	f	3653	F	3312	f	2948,5	tf
3919	TF	3817	F	3647	f?	3299	f	2915	tf
3914,5	f	3805	TF	3625	f	3283	f	2881	tf
3905	F	3800	TF	3609	F	3267	f		
3902,5	tf	3796	f	3571	F	3256	f		
3893	TF	3789	tf	3544	F	3230	f		
3886	tf	3785	f	3523,5	f	3205	tf		
3882	f	3778	f	3509	F	3183	tf		
3877	TF	3763,5	F	3482	F	3150,5	tf		
3870	f	3755	f	3462,5	f	3126	tf		

Le peroxyde d'azote employé a été préparé par calcination de l'azotate de plomb, il a subi une dessiccation prolongée sur l'anhydride phosphorique, suivie d'une distillation fractionnée en présence d'un excès d'oxygène et d'une sublimation dans le vide. La source de fond continu employée est le spectre continu de l'hydrogène.

ÉLECTROCHIMIE. — *Potentiel électromoteur et potentiel électrocinétique du graphite.* Note [1] de M. **Nathaniel Thon**, présentée par M. G. Urbain.

Une relation entre le potentiel électrocinétique ζ et le potentiel électromoteur φ analogue à celle constatée pour l'or [2] a été retrouvée dans le cas du graphite. Dans les solutions d'électrolytes, φ devient plus positif avec l'augmentation de la concentration, ce qui s'explique facilement : le graphite constitue une « électrode à emprunt » ; il se comporte au point de vue électromoteur comme le métal des ions de la solution, donc il fonctionne comme électrode à *cations*, la valeur positive de son potentiel électromoteur croissant avec la concentration.

Par contre, l'or plongeant dans une solution d'halogénures se comporte comme une électrode à anions (électrode de seconde espèce), en raison de l'insolubilité de Au Cl.

En tenant compte de la relation trouvée dans le cas de l'or, suivant laquelle l'augmentation de la valeur négative de ζ serait liée à une variation dans le même sens de φ, on devait s'attendre à ce que dans le cas du graphite le *maximum* de la vitesse de cataphorèse (en fonction de la concentration) *disparaîtrait*. J'ai constaté, en effet, que cette vitesse, donc la valeur négative de ζ, décroissait avec l'augmentation de la concentration dès le début. C'est que dans ce cas les variations de φ et de ζ sont conditionnées l'une et l'autre par la condensation de cations et à la paroi [3] et dans la couche de déplacement, par opposition au cas de l'or, où la variation de φ, impliquant une condensation prédominante d'anions, est antagoniste à l'action des cations sur ζ.

Pour le Pt et le Ag, dont le φ varie dans le même sens que celui de l'Au [et pour la même raison [4]], j'ai retrouvé la même allure de ζ que dans le cas de l'or.

L'action de ralentissement des cations est encore d'autant plus forte que

---

(1) Séance du 1er octobre 1928.

(2) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 119. — Page 120, ligne 13, et page 121, à la fin de la ligne 12, *il faut lire* ζ *au lieu de* φ.

(3) A assimiler, en langage chimique, à une formation superficielle de carbures (cycliques au point de vue de structure) des métaux.

(4) Ceci a été constaté encore pour le Hg et le Cu.

leur tension de dissolution est plus basse. Cette différence est liée à une modification concomitante de φ, lequel est d'autant plus positif que le cation en solution est plus noble. Conformément à notre relation entre φ et ζ, cela comporte l'abaissement des valeurs négatives de ζ, ce qui conduit à un ralentissement. L'action exceptionnellement puissante sur ζ de l'ion colorant du violet cristallisé se reproduit dans le cas du graphite, donnant lieu, là aussi, à une inversion de signe.

Une illustration du cas du graphite serait fournie par le schéma employé dans la figure 2 de la Note citée, toutes les ordonnées, représentant les valeurs négatives des potentiels, décroissant avec l'élévation de la concentration. Ce schéma se rapporte au cas où la charge électromotrice de la paroi serait négative en sens absolu. Si la paroi est chargée positivement au point de vue de φ, ce qui paraît plus probable par égard aux diverses déterminations du « potentiel de zéro absolu », on y substituera un autre schéma. Cette représentation des phénomènes s'accorde avec la théorie des couches doubles développée par O. Stern [1].

CHIMIE PHYSIQUE. — *L'application de la loi d'action de masse aux doubles décompositions salines.* Note [2] de M. et Mme **Lemarchand**, présentée par M. Le Chatelier.

Nous avons [3] étudié les équilibres réalisés dans la précipitation simultanée du baryum et du calcium. Les concentrations observées nous ont permis de calculer les constantes d'équilibre des deux réactions de dissolution :

$$(1) \qquad BaSO^4 + 2\,HCl \rightleftharpoons SO^4H^2 + BaCl^2,$$

$$(2) \qquad BaSO^4 + CaCl^2 \rightleftharpoons CaSO^4 + BaCl^2.$$

Ces calculs ont été faits, soit en utilisant la loi de Guldberg et Waage, soit celle-ci modifiée par H. Le Chatelier et Van't Hoff par l'introduction de coefficients i. L'expérience montre que les constantes ainsi calculées n'ont une valeur acceptable que dans un intervalle limité que nous avons défini.

Nous avons essayé d'appliquer aux équilibres étudiés, la loi d'action de masse; en utilisant la notion d'activité, ce qui revient à déterminer le facteur

(1) *Ztschr. f. Elektrochem.*, **30**, 1924, p. 508.
(2) Séance du 7 janvier 1929.
(3) *Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 601.

correctif par lequel il faut multiplier les concentrations de chacun des corps existant à l'équilibre dans la solution. Le problème, dans notre cas, était facile à résoudre puisqu'une seule concentration était à corriger : celle de HCl ou de $CaCl^2$ suivant le cas, la concentration très faible des autres corps étant prise égale à leur activité.

Des courbes du coefficient de correction ont été tracées d'après les données expérimentales : nous nous sommes basés sur le fait que ce facteur introduit dans la loi détermine la valeur fixe du rapport du produit des concentrations et sur ce qu'il est égal à l'unité pour une concentration nulle de $CaCl^2$ ou de HCl.

Nous avons ainsi trouvé les valeurs suivantes pour HCl à 100° :

Concentrations de HCl :

0	215	283,5	289	1107	1480	1540

Valeurs du coefficient (γ) :

1	0,525	0,430	0,394	0,223	0,202	0,204

La constante d'équilibre est alors égale, dans tout l'intervalle des concentrations, à 0,00127.

Pour les solutions de $CaCl^2$ à 100° nous avons trouvé :

Concentrations de $CaCl^2$:

0	6	17,6	31	92,8	185,4	275,6	293,7	407,5	409,5	444,5

Valeurs du coefficient (γ) :

1	0,705	0,286	0,12	0,0276	0,0238	(0,0203)	0,0205	0,0269	0,0303	0,0328

La valeur de la constante d'équilibre pour tout l'intervalle des concentrations est 0,395.

La loi d'action de masse s'applique sous les formes

$$\frac{C_{BaCl^2} \cdot C_{SO^4H^2}}{C_{BaSO^4} \cdot A^2_{HCl}} = 0,00127, \qquad \frac{C_{BaCl^2} \cdot C_{CaSO^4}}{C_{BaSO^4} \cdot A_{CaCl^2}} = 0,395.$$

Les courbes ont l'allure générale de celles que d'autres auteurs ont déterminées pour les solutions d'acide chlorhydrique et celles de $CaCl^2$, par des moyens expérimentaux très différents. Il est possible, au moyen de leur tracé, de déterminer la valeur A_{HCl} correspondant à une concentration donnée $A_{HCl} = C_{HCl} \cdot \gamma_{HCl}$ ou celle de A_{CaCl^2} : $A_{CaCl^2} = C_{CaCl^2} \cdot \gamma_{CaCl^2}$.

L'application de la loi d'action de masse peut se faire alors rigoureusement pour tout l'intervalle des concentrations examinées : on peut ainsi connaître de façon plus précise la quantité de baryum restée en solution et évaluer l'erreur commise soit dans le dosage du baryum seul, soit dans la séparation quantitative du calcium et du baryum.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur une application nouvelle de l'ébullioscope différentiel.* Note (¹) de M. **H. Swietoslawski**, présentée par M. G. Urbain.

En 1927, j'ai décrit un nouvel ébullioscope différentiel dans lequel le liquide bouillant, entraîné par sa vapeur, est projeté du récipient renfermant la solution étudiée sur une éprouvette H où se trouve un thermomètre de Beckmann ou de Rauberteau.

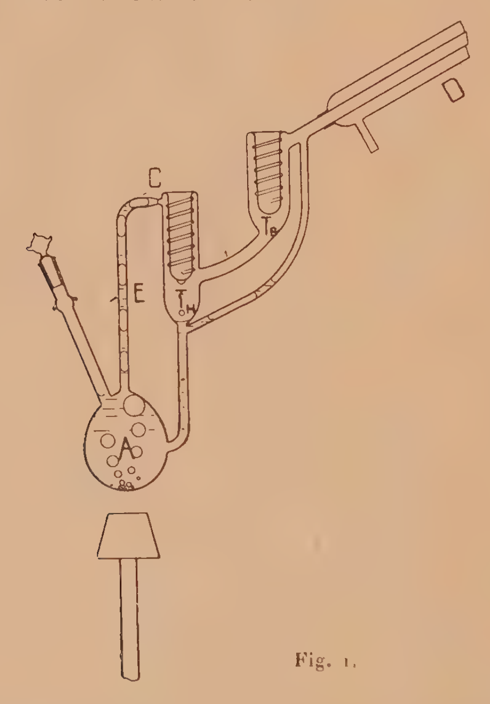


Fig. 1.

La vapeur pénètre ensuite par un tube dans l'espace B dans lequel est placé un second thermomètre.

Lors du fonctionnement de l'appareil, le premier thermomètre indique la température d'ébullition de la solution T_{II} sous la pression donnée P et

(¹) Séance du 2 janvier 1929.

le second la température T_B qui correspond à la température d'ébullition du dissolvant pur.

Cet appareil, muni d'un manostat et d'un manomètre, est spécialement apte à discerner les liquides purs d'avec les mélanges azéotropiques.

Supposons que nous étudions le mélange de deux liquides susceptibles de donner un maximum ou un minimum de tension de vapeur (mélange contenant a pour 100 de substance A et $(100 - a)$ pour 100 de substance B). Supposons également que grâce à un dispositif spécial nous puissions modifier dans une mesure assez large la pression à laquelle nous observons l'ébullition du liquide (*fig.* 1). Aux liquides individuels A et B correspondent des températures T_H et T_B, indépendantes de la pression. Ce cas se traduit par une seule courbe (I) sur le graphique (p, t) (*fig.* 2).

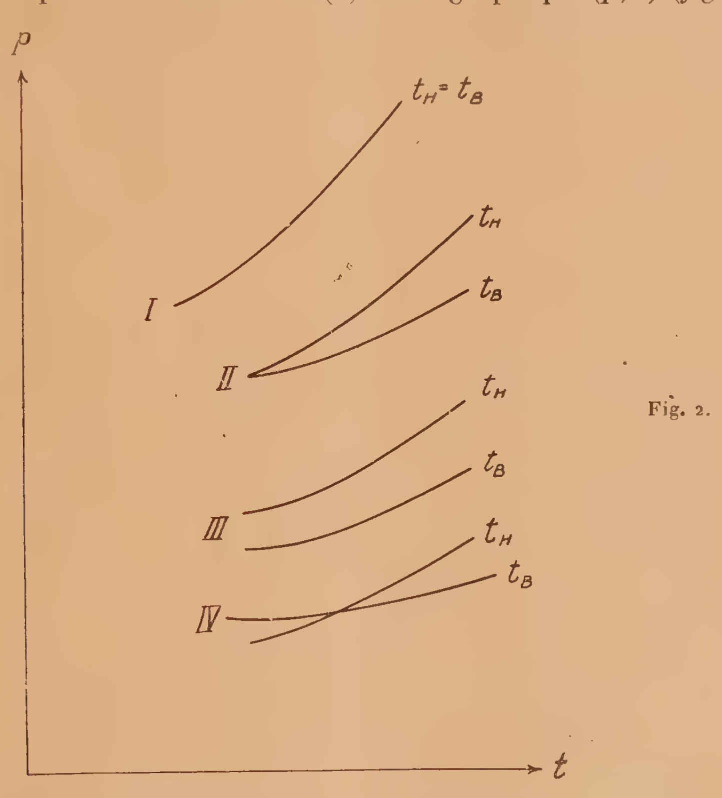


Fig. 2.

Dans le cas d'un mélange azéotropique les deux températures T_H et T_B sont identiques sous la pression de 1^{atm}, mais ne le seront plus si nous faisons varier la pression. Ce fait se traduit graphiquement par deux courbes (II) prenant naissance dans un point commun $T_H = T_B$ $(p = 1^{atm})$.

L'étude des mélanges non azéotropiques — soit $(a \pm \Delta a)$ pour 100 de substance A et $[100 = (a \pm \Delta a)]$ pour 100 de substance B — nous fait constater que les températures T_H et T_B ne sont plus identiques sous la pression de 1^{atm}.

En observant le changement de ces températures (T_H et T_B) par suite de l'augmentation de la pression nous pouvons distinguer deux cas :

1° Les deux températures s'éloignent l'une de l'autre (courbes divergentes III); 2° ou bien ces températures se rapprochent l'une de l'autre pour devenir égales sous une pression donnée (P_m) (courbe IV) : les deux courbes se rencontrent alors au point correspondant à cette pression P_m.

Il est évident que la pression P_m répondant aux conditions $T_H = T_B$ correspond en même temps à un maximum (ou minimum) de tension de vapeur du mélange étudié. Pour démontrer l'application décrite et le fonctionnement de l'ébullioscope différentiel, M. R. Kopczyński a bien voulu étudier un mélange d'alcool et de benzène. Ces deux liquides donnent un mélange azéotropique sous la pression de 1^{atm} (32,41 pour 100 d'alcool et 67,59 pour 100 de benzène). En faisant augmenter la pression on a observé les différences suivantes entre les températures T_H et T_B :

Pression en mm Hg.	$T_H - T_B$.
1150	0°,013
1440	0,020
1841	0,037

L'examen d'un liquide pur n'a évidemment laissé constater aucune différence entre les deux températures T_H et T_B notées sur les thermomètres placés dans les espaces H et B.

CHIMIE MINÉRALE. — *Action de la silice et de l'alumine sur le sulfate de soude*. Note de Mlle **Germaine Marchal**.

Nous avons vu précédemment qu'en chauffant divers sulfates (Ca, Ba, Mg) avec certains corps comme la silice, l'alumine, le kaolin [1], on

[1] G. Marchal, *Action de la silice, de l'alumine et du kaolin sur le sulfate de chaux* (*Journal de Chimie physique*, 23, 1926, p. 38; *Comptes rendus*, 177, 1923,

abaissait notablement la température de décomposition de ces sulfates. Les mêmes phénomènes doivent évidemment se produire avec le sulfate de soude; cette réaction de décomposition du sulfate de soude par la silice est d'ailleurs utilisée dans la fabrication du verre, où l'on ajoute un peu de charbon pour rendre la réaction plus complète.

Nous avons étudié systématiquement ces actions de la silice et de l'alumine sur le sulfate de soude, en chauffant des mélanges de ces corps anhydres et bien porphyrisés, contenus dans des nacelles, dans un four électrique dont la température était maintenue constante et déterminée par un couple de M. Le Chatelier. La nacelle employée était en alundum pour l'action de l'alumine, et en platine pour l'action de la silice, l'alundum étant détruit par le silicate de soude fondu. Le tube renfermant la nacelle était parcouru par un courant d'azote assez rapide qui entraînait les vapeurs acides dégagées. La réaction était suivie par les variations de poids de la nacelle.

Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux suivants :

Action de la silice sur le sulfate de soude.

Nos des expér.	Poids du mélange.	Température.	Temps de chauffe en heures.	Perte de poids. Pour 100 du mélange observé.	théorique.	Pour 100 du sulfate observé.	théorique.
		Proportions employées : $SO^4Na^2 + SiO^2$.					
1	3,5482 g	1200 °C.	1 h	4,15	39,52	5,92	56,17
			+ 1	5,87	»	8,38	»
			+ 1	6,86	»	9,80	»
			+ 1	7,95	»	11,35	»
2	3,5322	1300	1	9,90	»	14,14	»
			+ 1	13,67	»	19,52	»
			+ 1	16,94	»	24,20	»

p. 1300); *Action de la silice sur quelques sulfates métalliques* (*Bulletin de la Société chimique*, 4e série, 39, 1926, p. 401); *Action de la silice sur les sulfates de baryum et de magnésium* (*Comptes rendus*, 181, 1925, p. 784).

Action de l'alumine sur le sulfate de soude.

Nos des expér.	Poids du mélange.	Température.	Temps de chauffe en heures.	Perte de poids. Pour 100 du mélange observé.	Pour 100 du mélange théorique.	Pour 100 du sulfate observé.	Pour 100 du sulfate théorique.
Proportions employées : $2SO^4Na^2 + Al^2O^3$.							
1	6g,1283	1050 °C.	1h	3,57	41,34	4,84	56,17
		1200	+ 1	10,08	»	13,68	»
		1300	+ 1	22,34	»	30,31	»
Proportions employées : $SO^4Na^2 + Al^2O^3$.							
2	6g,0783	1300 °C.	1h	12,82	32,78	22,03	»
			+ 1	15,54	»	26,70	»
			+ 1	18,21	»	31,29	»

Ces résultats montrent que ces réactions de décomposition sont assez lentes et qu'à 1300° l'action de l'alumine est plus efficace que celle de la silice pour provoquer la décomposition du sulfate de soude.

Pour nous rendre compte d'une façon plus précise de l'action exercée par ces adjuvants silice et alumine, nous avons chauffé dans les mêmes conditions que précédemment du sulfate de soude seul, et nous avons suivi la décomposition après fusion (880°) à 1300° :

Décomposition du sulfate de soude seul.

Poids.	Température.	Temps de chauffe en heures.	Variations de poids %.
2g,4374	1300 °C.	1h	0,87
		+1	2,61
		+1h 03m	3,78
		+1	4,23

On voit que la silice et l'alumine ont une action importante comme dans les cas déjà étudiés, puisqu'à 1300°, au bout de 4 heures en chauffant le sulfate seul, on n'a pas encore obtenu la décomposition de la moitié du sulfate déjà décomposé au bout d'une heure par la silice.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur le sulfate neutre d'isopropyle et le sulfate dipropylique normal.* Note [1] de M. R. **Levaillant**, présentée par M. G. Urbain.

I. *Sulfate neutre d'isopropyle.* — Il n'a jusqu'ici été préparé que difficilement. Bushong en obtint quelques grammes par action du chlorure de sulfuryle sur l'isopropylate de sodium en suspension dans l'éther anhydre. Reprenant ce procédé, Bert (1925) réussit à élever à 25 pour 100 le rendement en produit brut non distillé. Après Bushong, il présente le composé en question comme éminemment altérable et à employer de suite.

On peut facilement préparer le sulfate neutre d'isopropyle par action directe de l'alcool isopropylique sur le chlorure de sulfuryle :

$$(1)\qquad SO^2Cl^2 + 2CH^3 - CHOH - CH^3 = SO^4[CH(CH^3)^2]^2 + 2HCl.$$

Divers essais m'ont conduit à la technique suivante, qui donne un rendement supérieur à 30 pour 100 en produit distillé : L'alcool isopropylique anhydre et le SO^2Cl^2 sont employés dans les proportions fixées par (1). Le SO^2Cl^2 est dissous dans la moitié de son poids de tétrachlorure de carbone et bien entouré de glace. Tout en le faisant traverser par un très léger (pointe fine) courant d'air sec, on y introduit l'alcool goutte à goutte. On admet pendant quelques instants un courant d'air plus violent, puis on agite de suite avec de la glace en petits fragments. La couche inférieure décantée est de nouveau agitée avec de l'eau à 20°-30° cette fois (prolonger le contact; les eaux de lavage sentent le gaz sulfureux et décolorent le permanganate). Après un dernier lavage à l'eau, on ajoute à peu près la même quantité de tétrachlorure qu'au début, et on laisse quelque temps au repos. La couche inférieure est décantée avec soin, et le tétrachlorure chassé dans le vide (trompe à eau) au bain-marie; on chauffe progressivement vers 70°, maintenant cette température jusqu'à ce que la pression devienne 30^{mm} environ. On distille ensuite sous 3 à 4^{mm} au plus, sans élever la température au-dessus de 90°. Presque tout le liquide distille alors (entre 72° et 82° sous $3-4^{mm}$); on s'arrête dès qu'une décompo-

---

(1) Séance du 2 janvier 1929.

sition apparaît, faisant baisser le vide; il reste un faible résidu brun clair.

Exemple. — 405g (3 mol-g) de SO^2Cl^2 dissous dans 203g de CCl^4, dans lesquels on a fait tomber en 3 heures 360g (6 mol-g) d'alcool isopropylique, ont ainsi fourni 185g de sulfate passé entre 75° et 80° sous 3 à 4mm. 3 mol-g de sulfate pesant 546g, le rendement atteint $\frac{185}{546}$ ou 34 pour 100.

Le liquide recueilli, pratiquement pur, est redistillable totalement sous 2 à 3mm (si l'on ne chauffe pas au-dessus de 85°). Mais sous 3 à 4mm, si l'on chauffe vers 90°, une petite portion se décompose généralement en fin de distillation.

Le sulfate neutre d'isopropyle est un liquide incolore, soluble dans la ligroïne, et dont l'odeur rappelle à la fois le pétrole et l'acétone.

Éb. = 78°-80° sous 3mm,7; $n_D^{17°} = 1,409$; $d_{0°}^{0°} = 1,118$; $d_{0°}^{17°} = 1,101$;
Réf. mol. exp. $M_D = 40,91$; théorique 40,98.

Il m'a été impossible d'observer l'altération rapide signalée par les expérimentateurs précédents, due sans doute à des impuretés catalytiques. Les échantillons préparés se sont bien conservés, pendant plus d'un mois, à la température de 15°-20°, leur indice de réfraction (avec 3 décimales) demeurant constant. Stable à la température ordinaire, ce sulfate est cependant moins robuste que le sulfate dipropylique normal qui, supportant sans décomposition, une température de 140°-145°, peut être distillé dans le vide de la trompe à eau.

II. *Action du sulfate neutre d'isopropyle et du sulfate dipropylique normal sur le phénate de sodium :*

$$C^6H^5ONa + SO^4(C^3H^7)^2 = C^6H^5 - O - C^3H^7 + SO^4\langle{}^{Na}_{C^3H^7}. \qquad (2)$$

1° A la solution tiède de 24g de phénol et 25g de soude dans 60cm³ d'eau, placée dans un ballon à réfrigérant ascendant, on a ajouté d'un coup 45g de sulfate neutre d'isopropyle. Par agitation une élévation de température notable s'est manifestée. On a maintenu 4 heures vers 80°, tout en agitant de temps à autre. Après refroidissement et addition d'eau pour dissoudre le solide formé, on a extrait à l'éther, séché sur $CaCl^2$, puis distillé dans le vide au bain-marie. On a recueilli 16g de produit brut à odeur assez agréable; un peu de sulfate neutre d'isopropyle formait le résidu de distillation. Rendement en produit brut 47 pour 100. Le liquide, soumis à redistillation, est passé surtout entre 63° et 65° sous 11mm. Constantes de cette

fraction :

$$n_D^{17°,5} = 1,4983; \quad d_{0°}^{0°} = 0,959; \quad d_{0°}^{17°,5} = 0,943.$$

M_D exp. = 42,32; théorique 42,24 pour $C^6H^5 - O - CH(CH^3)^2$ (à partir de l'anisol); densité indiquée pour ce corps (dictionnaire Beilstein) $d^0 = 0,958$.

2° Dans le cas du sulfate dipropylique normal (avec un quart de phénol en excès, il est vrai), le rendement en produit brut s'est élevé à 66 pour 100, et l'on a, en fin de distillation, récupéré un peu de sulfate inaltéré passant vers 109° sous 12mm. Deux redistillations ont donné un liquide (odeur agréable) présentant les constantes :

Éb. 81° sous 17mm; $n_D^{15°} = 1,503$; $d_{0°}^{0°}$ 0,969; $d_{0°}^{15°} = 0,955$.
M_D exp. = 42,13; théorique 42,24 pour $C^6H^5 - O - CH^2CH^2CH^3$.

III. *Oxydation du sulfite dipropylique normal.* — Il ne semble pas que l'on ait songé, pour obtenir les éthers sulfuriques neutres, à oxyder les éthers sulfureux correspondants. Ces derniers se préparent aisément à partir des alcools et du chlorure de thionyle ou du chlorure de soufre; ils résistent à des températures plus élevées que les sulfates.

Mes premiers essais ont porté sur l'oxydation du sulfite dipropylique.

Le sulfite (Éb. = 82° sous 15mm; $d_{0°}^{0°} = 1,042$; $d_{0°}^{16°} = 1,026$; $n_D^{16°} = 1,426$) a été agité avec un excès de solution de permanganate de potassium. Après extraction au tétrachlorure, on a distillé dans le vide. Un liquide incolore est passé à 87-89° sous 3mm,5 environ; $n_D^{18°} = 1,414$; $d^{0°} = 1,12$. On reconnaît le sulfate dipropylique.

GÉOLOGIE. — *Sur la structure de la zone subbétique entre Moratalla et la zone bétique.* Note de M. **P. Fallot**, présentée par M. Pierre Termier.

Le front des masses charriées des alentours de Caravaca ([1]) est rompu en éléments légèrement imbriqués. Le plus septentrional, formant le témoin de la Sierra del Fronton et le Buitre (1426m), incline vers le Sud sa carapace de Tithonique et de Néocomien. La crête alignée Est-Ouest du sud du Buitre (Nevazo) au sud du Rio Benamor représente le front d'un pli qui s'appuie sur ce Crétacé et dont la masse, comportant la série jurassique du Gavilan, forme la majeure partie des sommets entre cette montagne et Caravaca. Sa carapace de Tithonique et de Néocomien, s'abaissant aussi au Sud, atteint la dépression suivie par le Rio Argos et la route de la Puebla de Don Fadrique. Sous un liséré irrégulier de Keuper apparaît, à la base

(1) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 1150, et 188, 1929, p. 67.

de cette série (*fenêtres* des ravins de la Barquilla, de Pajarejo et du C° Vicario), le Néocomien écrasé qui appartient en partie à des lambeaux de flanc renversé et en partie à la carapace du Buitre. Le Keuper de la base de la série de Gavilan, localement mêlé à du Crétacé broyé, se poursuit, par le B° Yeseras, vers l'Est, où il forme, accompagné seulement de calcaires du Muschelkalk et de dolomies sombres, les collines entre Caravaca Cehegin et Calasparra.

Au sud de Rio Argos, le pli couché de la Peña Rubia ([1]) chevauche à son tour la racine de la série de Gavilan. Sa carapace crétacée enveloppe en partie la charnière frontale. Coupé par une falaise transversale dominant la route de Caravaca à Cehegin, il montre, d'ailleurs disloquée, la série jurassique mentionnée précédemment ([2]). Son flanc renversé est réduit à des lentilles de Néocomien écrasé reposant sur des marnes rouges du Keuper, solidaires de celles du B^co Yeseras. Ce fait implique le laminage ou la rupture de la série du Gavilan et du flanc renversé de la Peña Rubia.

Le massif Buitre-Gavilan se prolonge vers l'Ouest par les montagnes comprises entre Archivel et la Sierra Seca. La partie sud de la série de Gavilan et le pli de la Peña Rubia disparaissent à l'Ouest sous le Néogène transgressif de la Torre de los Alcores.

Le régime tectonique change au sud du Rio Quipar. Le Tithonique de la carapace du pli de la Peña Rubia se relève vers le Sud, amorçant les plis droits des massifs de Burete, de la Labia et de Pedro Ponce-Selva, où le Lias et le Dogger prennent d'ailleurs le faciès marno-calcaire à Ammonites ([2]).

Le Trias qui affleure dans la dépression anticlinale des Casas de Burete paraît en continuité par l'est du massif avec celui de la région Cehegin-Bullas. Vers l'Ouest, le Keuper forme de larges surfaces dans la zone déprimée de la Paca. Accompagné de lentilles de Muschelkalk et de dolomies à affinités bétiques, il supporte souvent directement les « couches rouges » crétacées du fait de l'ablation du Jurassique. Ce n'est que plus loin vers le Sud-Ouest que la série se complète de nouveau dans la chaîne Gigante-S^a de Maria ([3]). Ainsi, les trois plis couchés du Buitre-Fronton,

---

([1]) R. Nicklès, *Sur l'existence de phénomènes de charriage en Espagne dans la zone subbétique* (*Bull. Soc. géol. de Fr.*, 4° série, 4, 1904, p. 224-231).

([2]) *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 67.

([3]) *Comptes rendus*, 187, 1928, p. 988.

du Gavilan-Nevazo et de la Peña Rubia, qui présentent des degrés divers de dislocation et d'érosion, ne comportent que des lambeaux disjoints de flancs renversés et semblent indépendants du Trias sur lequel ils ont cheminé ; les deux premiers, cisaillés ou laminés par leurs racines, s'effilent au Sud et leur partie radicale offre de complexes intrications dans le Trias, sur lequel paraît reposer, avec la même indépendance, la série jurassique Burete-Pedro Ponce. L'absence du Jurassique, arraché sur de grandes surfaces à l'ouest de La Paca, confirme cette impression. Il serait tendancieux de parler de *nappe de Trias*, mais celui-ci me semble à son tour charrié, dans toute la région étudiée ici. Le coin de Crétacé et de Lutétien formant la Sierra La Puerta, entre Caravaca et Calasparra, émerge au front de ce Trias comme un paquet arraché au substratum, indépendant de la série secondaire charriée. Il comporte du reste un Lutétien qu'elle ne présente pas ici.

En dépit des changements de faciès, notés à partir de la S[a] de Burete, les massifs plus méridionaux ne doivent pas former une unité tectonique distincte : leur Jurassique paraît se relier par celui de la Peñica del Viento et de la Sierra de las Cabras à celui du flanc normal de la Peña Rubia. Mais, une masse de dolomies et de calcaires jurassiques paraît reposer sur le Tithonique et le Crétacé de la Sierra de las Cabras. De plus, du Rincon de Egea au nord de la plâtrière de Miravetes, une masse complexe de Trias et de Lias à faciès alpin (Jimenez de Cisneros), tranchée par le Rio Argos, semble flotter sur le Crétacé de la carapace de la série de Gavilan. Si une étude détaillée ne permet pas d'interpréter ces superpositions comme résultant d'accidents locaux, il faudra y voir deux témoins d'une série ou digitation supérieure. Peut-être les dolomies couronnant le Crétacé à Ammonites dans les Cuchillos de la Labia appartiennent-elles au même ensemble. A partir du massif de Pedro Ponce, la masse charriée, affectée d'un synclinal déversé à l'Est-Sud-Est, où sont pincés le Sénonien et le Nummulitique, s'enfonce vers le Sud. Le massif lutétien de la Peña Rubia lui est accolé au Sud. Il domine de ses parois verticales la large et profonde dépression quaternaire du Rio de los Terneros qui sépare la série étudiée du massif de l'Espuña, lequel appartient, déjà, à la couverture de la zone bétique.

HYDROLOGIE. — *Méthode de détermination du fond d'une nappe souterraine par l'observation des variations de sa surface libre.* Note de M. **Porchet**, présentée par M. L. Cayeux.

Des méthodes que nous avons étudiées, discutées et appliquées dans notre étude sur l'écoulement souterrain des eaux (Thèse de Mathématiques soutenue en 1923 devant la Faculté des Sciences de l'Université de Paris), permettent de calculer la surface libre d'une nappe souterraine connaissant le fond imperméable sur lequel elle coule, son débit et les constantes du sol dans lequel elle circule.

La méthode faisant l'objet de la présente Note a pour but de résoudre un problème inverse du précédent : « Connaissant la surface libre d'une nappe, calculer la surface du fond imperméable sur lequel elle coule. » La solution de ce problème présente une grande importance pratique pour les questions de prospection des nappes souterraines. Si l'on suppose connus le débit de la nappe et les constantes du sol dans lequel elle circule, ce dernier problème peut théoriquement se résoudre par l'application des méthodes ayant servi pour le premier, les calculs étant conduits en sens inverse.

Mais une des difficultés pratiques, surtout pour une nappe de grande étendue, est la connaissance des constantes du sol dans lequel elle circule et principalement de son coefficient de filtration qui varie souvent beaucoup d'un point à un autre.

La méthode proposée permet de s'affranchir de la connaissance de ce coefficient par l'observation de la surface libre de la nappe à deux époques correspondant à des débits différents.

La méthode proposée conduit aux résultats suivants :

« Si l'on prend dans le plan horizontal de comparaison un point m et une direction mx et si l'on considère une nappe qui, pour un débit Q_1, a une surface libre dont la cote au-dessus de m est y_1 et la pente suivant mx y'_1 et dont les mêmes éléments sont y_2 et y'_2 pour un débit Q_2, la cote y du fond imperméable sur lequel coule cette nappe est donnée par

$$y_2 - y = m(y_2 - y_1)$$

avec

$$m = \frac{y'_2 \pm \sqrt{B y'^2_1 - (B-1) y'^2_2}}{y'_2 - y'_1}, \qquad \text{si } y'_2 \neq y'_1$$

et

$$m = B, \qquad \text{si } y'_2 = y'_1,$$

B étant égal à $\dfrac{1}{1 - \dfrac{Q_1}{Q_2}}$.

Ces formules sont pratiquement exactes sous les réserves suivantes :

Permanence des régimes de la nappe correspondant aux débits Q_1 et Q_2.

Constance du coefficient de filtration du sol sur une même verticale.

Faibles pentes de la nappe et du fond. »

Cette méthode a donné des résultats concluants pour l'étude de nappes d'assainissement dont les surfaces libres avaient été observées par M. Dieserens de Zurich.

Nous l'employons actuellement pour l'étude de la nappe souterraine de la Crau.

CYTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la karyokinèse de* Spathularia flavida *Fr. ex. Pers.* Note de Mlle **Panca Eftimiu**, présentée par M. P.-A. Dangeard.

Si l'on étudie le *Spathularia flavida*, on constate que l'asque se développe aux dépens d'un filament recourbé en crochet dans lequel deux cloisons délimitent une cellule binucléée placée dans la courbure du crochet. Cette cellule représente la cellule mère de l'asque. Ce mode de développement, très fréquent chez les Ascomycètes, est connu depuis les nombreux travaux de Dangeard [1].

La présente Note contient les résultats principaux de l'étude si délicate de la division indirecte chez ce champignon.

La Spathulaire jaune est plutôt facile à étudier, étant donné que les éléments sont assez gros et bien caractérisés. Sur des coupes du matériel fixé au Flemming et au picroformol de Bouin et coloré à l'hématoxyline ferrique, nous avons pu étudier les trois mitoses successives du noyau sexuel.

En effet, la cellule binucléée se transforme directement en asque après la fusion de ses deux noyaux qui a lieu suivant le même processus que chez les autres Ascomycètes. Les deux noyaux s'approchent l'un de l'autre et la fusion commence par les filaments chromatiques qui s'entremêlent et

(1) P.-A. Dangeard, *La reproduction sexuelle des Ascomycètes* (*Le Botaniste*, 4, 1894, p. 21).

finit par l'union des nucléoles. Après la fusion, l'asque s'allonge jusqu'à atteindre le sommet des paraphyses. A ce moment, le noyau sexuel, qui a considérablement grossi, se trouve au milieu de l'asque entouré d'une mince bande de cytoplasme très dense qui occupe également l'extrémité supérieure de l'organe tandis que le reste de la cellule est formé par de petites vacuoles. Le cytome, constitué presque exclusivement par de longs cytosomes (mitosomes ou chondriocontes) répartis dans toute la trame cytoplasmique, cesse d'être visible aussitôt que le noyau entre en division. Pendant les divisions nucléaires et la formation des spores, l'asque contient de nombreux granules groupés autour du noyau ou même dispersés dans tout le cytoplasme.

Au moment de la division, le réticulum chromatique se transforme en filaments irréguliers et noueux qui grossissent et se raccourcissent pour former ensuite un amas de chromatine rejeté d'un côté du noyau : c'est le stade de *synapsis*. En même temps, le centrosome, qui se trouve au voisinage de la membrane nucléaire, se divise en deux centrosomes-fils qui s'éloignent l'un de l'autre et viennent se placer aux deux pôles du noyau.

Bientôt s'organise un fuseau achromatique, portant à son milieu, en une plaque équatoriale, les chromosomes en nombre de *quatre*. Les extrémités du fuseau sont occupées par un centrosome entouré chacun d'un aster peu visible. A la métaphase les chromosomes se partagent par une scission longitudinale en deux moitiés dont chacune se dirige vers un pôle. Le nucléole placé souvent au voisinage d'un centrosome persiste à peu près jusqu'à la fin de la division.

Après que les deux noyaux-fils ont réorganisé leurs éléments nucléaires, ils se divisent à leur tour. La seconde division s'effectue comme la première mais n'est pas précédée de synapsis. A la prophase de la deuxième mitose, on voit réapparaître les quatre éléments chromatiques qui se divisent à la métaphase. Les chromosomes-fils se séparent et se groupent aux extrémités du fuseau.

Dans la troisième mitose, le spirème donne directement quatre chromosomes qui se divisent également de sorte que l'on observe à l'anaphase quatre chromosomes près de chaque centrosome. Quant à la position de l'axe du fuseau, elle est généralement oblique par rapport au grand axe de l'asque dans la première mitose, tandis que dans les dernières, les fuseaux ont une position transversale.

Aussitôt les divisions achevées, on constate un allongement des noyaux-fils; les spores s'allongent égalcment et à la maturité, elles présentent un

noyau filiforme pourvu d'un long filament chromatique flexueux attaché au nucléole.

En résumé, la première mitose du noyau sexuel de l'asque est une division hétérotypique caractérisée par la présence d'un synapsis.

C'est au moment de ce stade que se passent, en général, d'après la plupart des auteurs, les phénomènes intimes de la réduction chromatique dont le résultat est de diminuer de moitié le nombre des chromosomes, doublé par la caryogamie qui s'effectue dans l'asque. La deuxième mitose est une division homotypique tandis que la troisième est typique : le spirème se scinde directement en quatre éléments. Ces trois bipartitions sont caractérisées par la présence constante de *quatre* chromosomes très distincts. Ce nombre paraît être très répandu dans l'ensemble des Ascomycètes.

PHYSIOLOGIE. — *Le reflux vésico-urétéral.* Note (1) de M. **Édouard Papin**, présentée par M. Pierre Bazy.

Le reflux vésico-urétéral a donné lieu à de nombreux travaux dans ces dernières années.

Les expériences de Zemblinoff, Guyon et Albarran, Bazy, Lewin et Goldschmidt, Courtade et Guyon fils permettaient d'arriver à cette conclusion qu'à l'état normal, le méat urétéral est un appareil d'occlusion parfait et que c'est seulement dans des conditions pathologiques particulières que le reflux vésico-urétéral est possible. Beaucoup de ces expériences étant faites sur des animaux dont la musculature vésico-urétérale n'est pas identique à celle de l'homme, leur valeur est discutable.

En 1913, dans un Mémoire publié avec M. Legueu, j'ai décrit la dilatation permanente des orifices urétéraux qui peut être congénitale ou acquise. Elle est caractérisée par ce fait qu'en remplissant la vessie, on remplit en même temps les uretères et les bassinets, de même qu'en vidant ceux-ci par cathétérisme urétéral, on vide complètement la vessie. C'est un système de vases communicants.

Le fait que je veux rapporter aujourd'hui est différent des faits publiés dans ce travail : il s'agit d'un cas de reflux vésico-urétéral chez un prostatique, sans dilatation apparente du méat urétéral.

Cette observation est susceptible de modifier nos idées sur la distension

(1) Séance du 7 janvier 1929.

de l'arbre urinaire chez ces malades. Elle est à ma connaissance unique jusqu'à ce jour.

Poursuivant mes études sur la vessie des prostatiques avec mes collaborateurs MM. Chauffour et Boulland, j'ai eu l'occasion de radiographier un malade atteint d'hypertrophie de la prostate avec rétention incomplète, en position debout et de profil.

La vessie étant remplie (300^{cm^2} environ), nous prenons une première radiographie de profil : nous voyons une vessie d'aspect habituel, sans bas-fond rétro-urétral.

Nous faisons uriner le malade qui ne rend que 100^{cm^3} environ, nous remettons la sonde vésicale opaque qui sert de repère et nous prenons un second radiogramme.

Le malade a uriné non seulement dans son urètre, mais aussi dans son uretère dilaté qui s'est rempli jusqu'au bassinet de bas en haut, en sens contraire de l'action de la pesanteur.

A un examen cystoscopique antérieur, nous avions noté la saillie de l'hypertrophie dans la vessie et la présence de deux orifices urétéraux normaux. J'ai refait une cystoscopie, j'ai constaté que les deux orifices un peu saillants étaient normaux. Au-dessus de l'orifice droit, il y a une cellule. J'ai introduit une sonde urétérale dans l'uretère droit jusqu'à 15^{cm} : un peu d'urine sortit par éjaculations. Alors je commandai au malade d'uriner, ce qu'il fit et presque aussitôt on vit par la sonde urétérale sourdre à gouttes pressées un liquide qui n'était autre que de l'eau : à mesure qu'augmentaient les efforts de miction l'écoulement se transformait en jet continu.

Les résultats de l'examen confirmaient ceux de la radiographie : le malade urinait dans son uretère, en même temps qu'il urinait par l'urètre.

Remarquons que la vessie ne présentait pas les signes cystoscopiques d'une cystite intense. L'opération de la cystostomie a permis de vérifier les observations endoscopiques.

Le reflux que nous avions décrit en 1913 était purement passif; en remplissant ou vidant la vessie, on remplissait ou vidait les uretères. Reins, uretères et vessie formaient un système de vases communicants.

Ici c'est tout différent : en remplissant la vessie, on ne remplit pas les uretères : il faut que la vessie se contracte pour chasser le liquide dans les uretères.

Ainsi peut-on distinguer jusqu'ici trois catégories de cas :

1° Les uretères sont béants et l'injection faite dans la vessie les remplit instantanément;

2° Les uretères paraissent normaux, mais le liquide injecté dans la vessie passe quand même dans leur cavité;

3° Les uretères paraissent normaux, le liquide injecté dans la vessie ne les remplit pas, mais la contraction volontaire de la vessie détermine le reflux.

Il est admis depuis longtemps que la distension des uretères dans la rétention vésicale chronique est due non au reflux vésico-urétéral, mais à l'obstacle apporté à l'évacuation des uretères dans la vessie distendue. Peut-être faudra-t-il aussi réviser ces idées. D'après cette expérience, jusqu'ici unique, on peut admettre que les vieux rétentionnistes à uretères dilatés pissent dans leur uretère à chaque miction : dans l'intervalle le liquide retomberait dans la vessie, nous n'avons pas trouvé de rétention au cathétérisme urétéral. Mais ces coups de bélier successifs dilateraient peu à peu l'uretère et sans doute arrive-t-on ainsi au degré suivant, à l'uretère forcé qui se remplit mécaniquement quand on injecte la vessie.

Il est vrai qu'on a étudié expérimentalement la possibilité du reflux vésico-urétéral chez l'homme, d'après les expériences sur les animaux, mais un fait évident, visible pour tous de ce reflux sous l'influence de la contraction vésicale seule il n'y en a pas jusqu'ici.

Si ce cas est le premier démontré par la radiographie et le cathétérisme urétéral, il faut rappeler cependant le cas de Geigel (1906) d'un médecin qui s'il se retenait pour uriner éprouvait un violent ténesme, sentait les urines remonter dans ses uretères avec une vive douleur dans les reins : il urinait ensuite en deux temps à quinze minutes d'intervalle, vidant sa vessie d'abord, ses uretères ensuite.

ZOOLOGIE. — *Différences sexuelles dans l'ornementation et dans le système pigmentaire chez un Crabe Oxyrhynque* (Macropodia rostrata *L.*). Note de M. **Charles Pérez**, présentée par M. E.-L. Bouvier.

Les deux sexes du *Macropodia rostrata* (L.) diffèrent entre eux non seulement par les caractères morphologiques généraux qui ont fait l'objet d'une Note récente [1], mais encore par des détails précis dans l'ornementation de leur chitine.

Aussi bien sur le corps que sur les pattes, ce Crabe porte de fortes soies

---

[1] *Comptes rendus*, 188, 1929, p. 91.

recourbées, rappelant la forme des crochets hélicoïdaux qui servent à la suspension des agrès de gymnastique (voir la figure 6 de la Note précitée). Ces soies accrochent au passage des débris variés et notamment des rameaux d'Algues filamenteuses, qui peuvent constituer des boutures susceptibles de continuer à vivre et dont le Crabe reste revêtu. Or, chez le mâle, ces soies en crochet sont relativement peu nombreuses sur le rostre et sur les régions branchiales de la carapace; elles se réduisent à quelques unités sur le pléon : la pièce formée par la soudure du telson et du sixième segment en est totalement dépourvue; le cinquième segment en porte seulement deux au voisinage de chacun de ses bords; le quatrième, six ou sept de chaque côté, etc.

Au contraire, chez la femelle, les crochets sont beaucoup plus nombreux sur le rostre, sur les régions branchiales de la carapace et la face dorsale du pléon en porte aussi à profusion. Corrélativement, les mâles sont en règle générale beaucoup moins habillés d'algues que les femelles. Si, comme on le croit généralement, ce revêtement étranger a un effet protecteur, la meilleure dissimulation du sexe qui incube les œufs apparaît ainsi, en dehors de tout finalisme, comme directement liée à une disposition anatomique très simple, dont le résultat est automatique.

Des différences remarquables s'observent aussi dans le système de coloration. La pigmentation générale du corps est due à un semis serré de chromatophores étoilés, à carotinoïde, qui transparaissent à travers la chitine tégumentaire. Le mâle porte en outre, sur le plastron des pinces, une tache cordiforme d'un blanc éclatant. Celle-ci se résout au microscope en un réseau très dense d'un pigment grenu, brun foncé en lumière transmise, appartenant peut-être à la série mélanique, mais non arrivé à l'état de mélanine vraie. Cette tache forme écran opaque devant la masse nerveuse des ganglions thoraciques, situés à un niveau un peu plus profond.

La femelle adulte porte aussi la même tache thoracique, mais en plus une autre tache blanche, de même aspect et de même nature, située sur la pointe du telson. Au point de vue de la coloration d'ensemble du Crabe, dans la position d'adduction extrême de l'abdomen, chez une femelle non gravide, cette tache du telson se substitue en quelque sorte à la tache thoracique sur laquelle elle se projette et qu'elle occulte exactement. Les deux taches sont au contraire isolément visibles quand les œufs pondus écartent le pléon du thorax. Chez la femelle immature, la tache thoracique existe d'abord seule, nouvel exemple de cette ressemblance des femelles jeunes avec les mâles, sur laquelle j'ai déjà attiré l'attention. Plus tard, les chromatophores à carotinoïde émigrent de la pointe du telson, et leur

recul ménage une plage incolore où apparaissent ensuite peu à peu les chromatophores de la tache blanche. Dans les figures qui accompagnent ma Note précédente, les taches blanches ont été conventionnellement représentées en noir plein.

Sur les fonds de la baie de Morlaix, où pullulent les *Macropodia rostrata*, ces Crabes sont fréquemment infestés par une Sacculine, la *Sacculina Fraissei* Giard, espèce que Boschma considère comme identique à la *S.* (*Drepanorchis*) *neglecta* (Fraisse), qui parasite dans la Méditerranée les Oxyrhynques du genre *Inachus*. Quand la Sacculine est installée sur une femelle, on n'observe, suivant la règle ordinaire, aucune perturbation dans la morphologie de l'hôte, simplement figé à la phase de son évolution qu'il avait atteinte au moment où son parasite est devenu externe. Tout au plus peut-il arriver que le frottement mécanique amène l'usure et la chute des pléopodes. Chez les mâles l'influence est variable, sans doute suivant l'âge plus ou moins précoce auquel s'est faite l'infestation : les uns ne sont en rien modifiés; d'autres présentent au contraire un abdomen plus ou moins élargi, en couvercle excavé; et, dans la mesure même où l'abdomen est ainsi, au point de vue de sa forme générale, inverti dans le sens femelle, on le voit garni sur sa face dorsale de multiples soies en crochet et marqué sur le telson de la tache blanche signalétique.

PROTISTOLOGIE. — *Les métamorphoses prépalintomiques et métapalintomiques des Foettingeriidæ* (*Ciliés*). Note de M. **Édouard Chatton**, Mme **Marguerite Lwoff** et M. **André Lwoff**, présentée par M. F. Mesnil.

Dans une Note antérieure, nous avons décrit les transformations que subit la ciliature des *Foettingeriidæ* pendant la multiplication de ces Infusoires. Ces transformations, étudiées surtout chez *Foettingeria*, peuvent se résumer de la manière suivante : 1° au moment de l'enkystement, la ciliature hélicoïdale caractéristique de tous les trophontes disparaît. Les cils détachés du corps restent figés dans l'enveloppe muqueuse du kyste. Les bandelettes ciliaires, les granules basaux, jusque-là bien visibles, s'effacent sans laisser de traces décelables par l'examen *in vivo* ou par les colorations habituelles. Quand la multiplication est assez avancée pour que, en crevant le kyste, on puisse réaliser des étalements des éléments qu'il contient, il est possible d'imprégner ceux-ci à l'argent par la méthode de Ranvier-Klein. Cette méthode révèle des bandelettes ciliaires dépourvues de cils qui, au lieu d'une course hélicoïdale souvent compliquée, présentent toujours une course exactement méridienne.

Ce plan ciliaire méridien se conserve tant que dure la multiplication sous le kyste, les scissions s'effectuant toujours à l'équateur du système ainsi formé. Dès que la multiplication est terminée, le système méridien revient, par torsion et non sans remaniements des stries, au système hélicoïdal, tandis que les cils poussent le long des bandelettes à partir de leurs granules basaux.

Chez les *Spirophrya* et les *Gymnodinioides*, la phase sans cils qui s'étend de l'enkystement au début de la multiplication est relativement courte. Elle ne dure que de 24 à 72 heures et l'Infusoire conserve sous le kyste la forme fondamentale du trophonte.

Mais, chez la *Synophrya hypertrophica*, parasite interne des Crabes, enkysté sous la peau, cette phase est très longue puisque l'Infusoire, qui a traversé le tégument et s'est considérablement accru, n'entre en multiplication que lorsque le Crabe mue. Chez les Crabes adultes, les mues sont espacées de plusieurs mois, peut-être de plus d'une année semble-t-il, dans certains cas, et nombreux sont les kystes dont le contenu dégénère avant que la mue vienne déclencher sa multiplication. De plus, sa masse ovoïde s'est, en s'accroissant, étalée en une très mince galette à contours profondément et irrégulièrement lobés.

La chute rapide des cils, la disparition totale de leurs insertions au moment de l'enkystement, la substitution d'un système ciliaire méridien à un système hélicoïdal avant la multiplication, la longue durée possible (*Synophrya*) de la phase enkystée posait un problème d'un haut intérêt : y a-t-il ou non continuité entre le système ciliaire hélicoïdal du trophonte et celui du tomonte, et cette continuité existant, comment s'effectue le passage de l'un à l'autre système ? La question semblait difficile à résoudre en raison de l'impossibilité d'étaler sans le cytolyser le contenu kystique indivis. Nous nous sommes décidés alors à tenter l'imprégnation de l'Infusoire à travers le kyste et contre notre attente y avons réussi [1].

Chez les *Foettingeria* ainsi imprégnés, on constate que l'évanouissement de la ciliature auquel on assiste sur les kystes *in vivo* n'est qu'apparent. L'argent révèle chez des Infusoires qui viennent de s'enkyster le même système ciliaire hélicoïdal que chez le trophonte. Sur des kystes de plus en plus âgés, on voit ce système hélicoïdal se transformer progressivement en système méridien, par détorsion et raccourcissement concomitant des

[1] La méthode à l'argent de Ranvier-Klein comporte en effet la dessiccation rapide des éléments avant l'imprégnation, opération qui est néfaste au contenu kystique. Nous avons supprimé ce temps et imprégné directement des kystes fixés aux vapeurs osmiques.

bandelettes de la ciliature générale qui s'effectue par résorption des bandelettes d'arrière en avant. En même temps la bouche est ramenée très près du pôle antérieur, et les stries adorales, très réduites chez le trophonte, s'allongent à la mesure de la ciliature générale et entrent, au nombre de six, dans le système méridien. La multiplication commence très peu de temps après, mais seulement lorsque le plan méridien est complètement réalisé. Les premières scissions, comme les suivantes, sont perpendiculaires à l'axe du système. De sorte que, malgré de saisissantes apparences, qui plaident en faveur d'une segmentation cubique, cette segmentation ou palintomie est toujours linéaire. Les choses se passent de même chez tous les *Foettingeriidæ* à multiplication intrakystique (*Spirophrya*, *Gymnodinioides, Synophrya*). Nous avons pu, à travers le tégument du Crabe et les deux enveloppes kystiques qui protègent l'hypertrophonte de la *Synophrya*, réaliser l'imprégnation des ciliatures et y déceler le système méridien dont les pôles occupent sensiblement le centre de chacune des faces de la galette infusorienne.

Ainsi, l'ensemble des transformations ciliaires qui mènent du trophonte au tomite par le palintomonte est maintenant entièrement connu. Il comporte deux phases bien distinctes : 1° une métamorphose prépalintomique qui débute dès l'enkystement et s'achève toujours avant la première scission palintomique ; 2° une métamorphose métapalintomique qui débute en même temps que s'achève la dernière scission palintomique et ramène le système ciliaire méridien des tomontes au système ciliaire tordu du tomite. Mais la torsion ne se complétera que dans le tomite enkysté à l'état phorétique ou phoronte.

Fait remarquable : la seule forme du groupe qui effectue sa palintomie à l'état nu, la *Polyspira Delagei*, ne présente qu'une détorsion très incomplète avant la palintomie. La réalisation du système méridien, les deux métamorphoses, paraissent donc liées à la multiplication sous le kyste.

Mais l'intérêt de ces faits dépasse de beaucoup le cadre des *Foettingeriidæ*, si, au lieu de considérer les transformations topographiques du système ciliaire, on considère surtout le fait de la continuité de ces systèmes alors que les cils sont tombés et que leurs insertions sont en apparence complètement effacées.

PHYSIQUE MICROBIOLOGIQUE. — *Action des rayons ultraviolets sur le virus rabique et ses antigènes rabique et venimeux.* Note de Mme **Phisalix** et M. **F. Pasteur**, présentée par M. L. Bouvier.

Le virus rabique se montre sensible à un certain nombre d'agents physiques : lumière solaire, rayons de Röntgen, radium, qui le tuent plus ou moins rapidement, en ménageant ou en détruisant son antigène rabique. Il contient aussi un antigène venimeux, puisqu'il est capable à lui seul de conférer une certaine immunité vis-à-vis des venins de cobra et de vipère. Nous avons essayé sur lui l'action des rayons ultra-violets, dont on connaît déjà l'influence sur quelques toxines microbiennes, en recherchant ce que deviennent la vitalité du virus et l'activité de ses antigènes, question de première importance dans l'emploi éventuel du virus irradié comme vaccin antirabique et antivenimeux.

Technique. — Le virus fixe (celui de l'Institut Pasteur de Paris) est broyé et émulsionné à $\frac{1}{200}$ dans l'eau salée physiologique; l'émulsion, filtrée sur toile et sur papier, est répandue en couche de 2-3^{mm} d'épaisseur dans une cuvette de verre à fond bien plan qu'on recouvre d'une plaque de verre Renovic. Le brûleur à rayons ultra-violets est amené à surplomber le liquide à une distance de 0^{m},50 et maintenu 30 minutes en activité. Pendant ce temps, le trouble de l'émulsion s'accentue un peu; l'échauffement du liquide ne dépasse pas 30°, température inférieure à celle à laquelle le virus est habitué dans l'organisme du lapin. Après irradiation, l'émulsion est centrifugée et ramenée, par décantation partielle, à l'état d'émulsion décimale, qui convient aux essais biologiques.

La source des rayons ultraviolets est un brûleur en quartz à vapeurs de mercure de la Verrerie Scientifique, type 220 continu, 3,5 ampères, puissance 942 watts aux bornes du brûleur. Les mesures énergétiques sont les mêmes que dans nos opérations précédentes [1]. La puissance totale étant ramenée à 100, nous obtenons :

	Watts-heure.
76 dans l'infrarouge..................	715,92
8 dans le visible.....................	75,36
16 dans le violet.....................	150,72

La lumière émise par le brûleur, et qui ne contient pas de rouge, est négligeable; seuls les 150,72 watts de l'ultraviolet, soit pour une demi-heure d'exposition

$$\frac{150,72}{2} = 75,36 \text{ watts},$$

ont produit les effets observés suivants :

Action sur le virus et son antigène rabique. Expérience. — Deux lapins reçoivent chacun sous la dure-mère, après trépanation, 0$^{cm^3}$,25 de l'émulsion

(1) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 538 et 795.

de virus irradié ; tous deux résistent. Avaient-ils l'immunité naturelle, ou l'avaient-ils acquise? Pour fixer ces points, ils sont éprouvés, 4 mois après, par inoculation sous la dure-mère de 0^{cm^3},25 d'une émulsion décimale de virus fixe ; ils se comportent tous deux de même ; les premiers symptômes rabiques apparaissent le 8e jour, et les lapins meurent paralysés le 11e jour. Il résulte de là : 1° que les lapins n'avaient pas l'immunité naturelle, car ils l'auraient conservée, et qu'ainsi l'agent infectant du virus a été tué par les rayons ultraviolets ; 2° que l'antigène rabique a été également détruit, car l'évolution de la rage, après épreuve par le virus fixe, n'a été modifiée ni dans sa durée, ni dans sa terminaison.

Action sur l'antigène venimeux du virus. Expérience. — Le venin et le virus irradié sont mélangés dans les proportions de 1^{cm^3} d'une solution au $\frac{1}{10000}$ de venin de vipère dans l'eau salée physiologique, pour 0^{cm^3},25 d'une émulsion décimale de virus. Le mélange est tenu à la température de 15-16° pendant 3 heures avant emploi. Trois souris adultes reçoivent chacune, sous la peau du dos, 1^{cm^3},25 du mélange venin-virus irradié ; trois témoins reçoivent, d'autre part, 1^{cm^3},25 du mélange de 1^{cm^3} de solution de venin (dose mortelle en 16-20 heures pour la souris) avec 0^{cm^3},25 d'eau salée physiologique.

Chez les deux groupes d'animaux, apparaissent et se déroulent les symptômes de l'envenimation vipérique; les témoins meurent en 19 et 20 heures; les souris de l'autre groupe en 2 et 3 heures, ainsi plus rapidement que les témoins, résultat en faveur de l'existence et de la persistance de la toxine rabique, ou d'une toxine provenant de la substance nerveuse du virus.

Ainsi, dans les conditions où nous sommes placés, *le virus rabique fixe, en émulsion homogène à* 1 *pour* 200, *exposé pendant* 30 *minutes aux rayons ultraviolets d'un brûleur en quartz à vapeurs de mercure, distant de* 0^{m},50, *et ayant fourni une énergie utile correspondant à* 75,36 *watts, a perdu à la fois son pouvoir infectant et ses antigènes venimeux et rabique. S'il n'est plus infectant, il n'est plus apte à être employé comme vaccin, soit contre la rage, soit contre l'envenimation.*

Remarque. — Notre étude était terminée, lorsque est venu à notre connaissance un travail de Takaya, paru à Tokio en 1926 et 1927 dans *Oriental Journal of Diseases of Infants.* Ce travail établit le pouvoir rabicide des rayons ultraviolets, *inconstant* sur le virus fixe, presque absolu sur le virus des rues. L'auteur japonais montre en outre l'impuissance de ces rayons à prévenir le développement du virus des rues, introduit chez le lapin par la voie cutanée.

Malgré les différences dans les conditions expérimentales de Takaya et les nôtres, dilution du virus, temps d'exposition aux rayons et distance à la

source, caractéristiques, non comparables, des brûleurs employés et de l'énergie utile, nos résultats confirment et complètent ceux de Takaya en ce qui concerne le pouvoir rabicide des rayons, que nous avons obtenue *complète* sur le virus fixe; ils montrent en outre la destruction totale des antigènes venimeux et rabique, et la toxicité relative de l'émulsion du virus irradié.

HISTOCHIMIE. — *Recherches histochimiques sur l'anthracose pulmonaire.* Note de MM. **A. Policard, S. Doubrow** et **D. Pillet**, présentée par M. F. Mesnil.

L'étude histochimique de poumons présentant de l'anthracose pulmonaire, provenant de sujets ayant habité la ville, mais jamais travaillé dans des mines de charbon, nous a permis d'apporter quelques résultats nouveaux dans le problème très discuté aujourd'hui de la nature du pigment anthracosique. Est-ce un pigment ferrugineux dérivé du sang ou des amas de particules exogènes de charbon amenées par la respiration?

I. La méthode de la microincinération nous avait montré [1] que les deux variétés de pigment coexistaient en réalité. Par cette technique, le pigment ferrugineux laisse des cendres rouges d'oxyde de fer, le charbon exogène disparaissant totalement.

II. Les dépôts de charbon exogène ne sont pas constitués exclusivement par ce corps; ils contiennent aussi des éléments minéraux divers, carbonates, silicates, feldspaths, etc., sous forme de particules extrêmement fines. Certaines de ces particules sont amorphes, d'autres cristallisées et anisotropes, agissant par conséquent sur la lumière polarisée. L'examen des coupes au microscope minéralogique permet de révéler d'une façon très nette la présence de ces particules minérales brillantes, satellites constants du charbon exogène. Le procédé est d'une extrême simplicité et d'une grande netteté. Les résultats se superposent exactement à ceux obtenus, sur des coupes identiques, par la technique de la microincinération.

III. Nous avions constaté que la microincinération des dépôts intrapulmonaires de charbon montre toujours au même endroit des dépôts abondants de cendres. Or ces cendres sont biréfringentes, beaucoup plus que les dépôts avant incinération. Ce fait semble devoir s'expliquer ainsi. Les silicates naturels, normalement amorphes et non biréfringents, prennent

(1) Policard, Doubrow et Pillet, *Application de la technique histochimique de la microincinération à l'étude des pigments anthracosiques pulmonaires* (*C. R. Soc. Biol.*, 98, 1928, p. 985).

par chauffage un caractère cristallin et anisotrope. C'est un phénomène bien connu.

IV. En détruisant du tissu pulmonaire anthracosique par des mélanges très alcalins d'hypochlorite de soude, on peut isoler le pigment noir pulmonaire. La partie ferrugineuse peut être dissoute par des acides forts à chaud. Il reste alors un résidu, représentant surtout le charbon exogène, mais où le microscope minéralogique révèle une quantité souvent considérable de particules anisotropes, qui représentent les poussières minérales respirées en même temps que le charbon et fixées avec lui. Après incinération, ces poussières donnent des cendres très biréfringentes.

V. Une cause d'erreur doit être évitée. Des dépôts plus ou moins pigmentés d'origine sanguine peuvent renfermer des cristalloïdes biréfringents formés d'hématoïdine ou d'éthers de la cholestérine. La présence de telles formations est banale, dans les infarctus par exemple. Leur distinction avec les cristaux minéraux est très facilement faite par un chauffage, même peu élevé, qui détruit les cristaux d'origine organique pour ne laisser subsister que ceux d'origine minérale exogène.

Ainsi, par des examens histochimiques simples, on peut révéler dans des cas d'anthracose pulmonaire ordinaire, en dehors de toute maladie professionnelle (pneumokoniose), la présence de particules minérales exogènes fixées dans le tissu pulmonaire, dans les mêmes points où se constatent des dépôts charbonneux. C'est là dans l'ordre histopathologique une nouvelle preuve des liaisons étroites, constatées dans l'ordre clinique, entre l'anthracose et la silicose.

MÉDECINE. — *Rôle du ganglion étoilé gauche dans le déterminisme de la crise d'angine de poitrine.* Note de MM. **R. Leriche** et **R. Fontaine**, présentée par M. Quénu.

Le ganglion stellaire gauche du sympathique paraît expérimentalement jouer un rôle important dans le mécanisme de production de la crise d'angine de poitrine. Les faits suivants l'établissent :

1° Chez un homme souffrant d'un syndrome douloureux du membre supérieur gauche, l'électrisation opératoire du ganglion étoilé, au cours de la détermination des branches nerveuses intéressées dans la maladie, a provoqué une véritable crise d'angine de poitrine avec douleurs violentes dans la région précordiale, dans les trois premiers espaces intercostaux, avec forte angoisse, sans accélération du pouls, ni dyspnée. L'électrisation d'autres parties de la chaîne sympathique ne donna rien de tel.

2° Chez une femme, en cours d'opération pour angine de poitrine, la libération du segment inférieur de la chaîne sympathique ayant déterminé une crise typique d'an-

gine de poitrine, l'injection de novocaïne dans la partie supérieure du ganglion étoilé arrêta net la crise.

3° Chez un homme déjà opéré pour des phénomènes douloureux dans le domaine du membre supérieur gauche, la piqûre du ganglion étoilé, seul élément restant de la chaîne cervicale, provoqua une crise d'angine de poitrine, suivie au bout d'une dizaine de minutes d'une poussée d'œdème aigu du poumon avec expectoration caractéristique, toux sèche, dyspnée expiratoire. La piqûre avait été entreprise pour essayer d'influencer par anesthésie locale quelques phénomènes musculaires résiduels.

4° Chez un homme atteint d'angine de poitrine à crises très fréquentes, et devant être opéré, une infiltration novocaïnique du ganglion étoilé gauche fut entreprise pour déterminer le côté sur lequel devait porter l'intervention. La piqûre du ganglion détermina une crise typique d'angine extrêmement violente qui ne se calma qu'au bout d'une heure.

5° Récemment enfin, chez une femme souffrant depuis 14 ans de crises paroxystiques tenant à la fois de l'angine de poitrine et de l'asthme bronchique, une injection novocaïnique du ganglion étoilé gauche fut entreprise pour déterminer le côté sur lequel devait porter l'opération. La piqûre, avant toute injection, provoqua une vasodilatation de la face avec syndrome de Claude Bernard-Horner, puis une crise d'angine de poitrine très violente avec douleur précordiale, angoisse, irradiations douloureuses dans le bras gauche. La respiration resta normale durant toute la crise et le pouls ne s'accéléra qu'au début. L'ensemble de la crise dura une heure.

Ces faits montrent l'importance considérable du ganglion étoilé gauche dans le déterminisme de la crise d'angine de poitrine. L'électrisation ou la piqûre d'autres parties de la chaîne sympathique n'est jamais suivie de phénomènes semblables à ceux que nous venons de signaler. Il semble que le ganglion agisse à l'état normal comme centre de réflexion des excitations sensitives nées au niveau des parois du cœur et de l'aorte pour régler le travail du cœur en fonction de l'état de ses parois et de celles de la crosse aortique. A l'état pathologique, dès que l'excitation dépasse la mesure physiologique de la sensibilité inconsciente, il devient un centre de réflexes viscéralgiques et semble déterminer la crise d'angine de poitrine. D'après d'autres faits non rapportés dans cette Note, il interviendrait de même dans certaines crises d'asthme et dans certains œdèmes aigus du poumon.

En tout cas, les faits expérimentaux ci-dessus signalés doivent être pris en sérieuse considération quand il s'agit d'entreprendre le traitement chirurgical de l'angine de poitrine. Ils semblent exiger l'ablation isolée du ganglion, ce qui jusqu'ici était très discuté.

A 15^h^50^m^, l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17^h^.

E. P.